МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Для всех специальностей первого курса очного обучения

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Братск 2019

Составила (разработала)*Габдрахманова А.В.*, преподаватель кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

«____________________20___г.   ________________________
(Подпись зав. кафедрой)

Содержание

Введение

Данное методическое пособие содержит лекционный материал курса «Геометрия» для студентов первого курса очного факультета, а также дидактический материал для закрепления и проверки знаний.

В пособии рассматриваются краткие теоретические сведения и основные формулы. Особое внимание уделяется практическим задачам, которые представлены на готовых чертежах.

1 Теоретические сведения

1.1 Координаты и векторы в пространстве

1.1.1 Векторы в предметах естественнонаучного цикла и вокруг нас

Возникновение векторного исчисления тесно связано с потребностями механики и физики. До XIX в. для задания векторов использовался лишь координатный способ, и операции над векторами сводились к операциям над их координатами. Лишь в середине XIX в. усилиями ряда учёных было создано векторное исчисление, в котором операции проводились непосредственно над векторами, без обращения к координатному способу задания.

Сам термин «вектор» впервые появился в 1845 году у английского математика и астронома Уильяма Гамильтона. Основы векторного исчисления были заложены исследованиями английского математика У. Гамильтона и немецкого математика Г. Грассмана. Их идеи были использованы английским физиком Дж. К. Максвеллом в его работах по электричеству и магнетизму. Современный вид векторам придал американский физик Дж. Гиббс (рисунок 1).

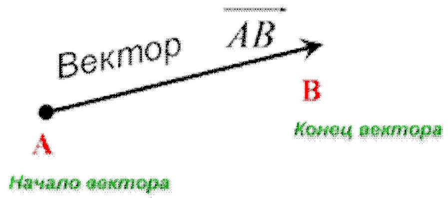


Рисунок 1 – Изображение вектора

Элементы «Векторной алгебры» используются в математике, физике в разделе «Механика», «Электричество», химии при составлении реакций, биологии и др.

<u>Определение.</u> Направленным отрезком или вектором называется отрезок, для которого указано какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой.

<u>Определение.</u> Длиной ненулевого вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка AB.

В векторной алгебре важную роль играют линейные операции над векторами: операция сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

<u>Определение.</u> Суммой $\vec{a}+\vec{в}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называют вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{в}$ при условии, что начало вектора $\vec{в}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рисунок 2). Это правило используется нами при сложении сил в физике (векторных величин, *рис*.3).

Применение векторной алгебры тесно связано с различными типами векторных произведений: скалярного, векторного и смешанного.

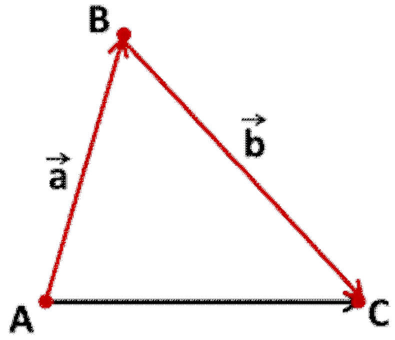


Рисунок 2 – Изображение суммы векторов

Понятие скалярного произведения векторов применяется, например, в физике, при рассмотрении работы силы F на заданном пути S: работа равна $|F||S|cos\ \alpha$, где α — угол между векторами F и S.В механике, физике широко используются понятия векторного поля. Примерами векторных полей могут служить также поле силы тяжести, магнитное и электрическое напряжение электромагнитного поля (*рис*.4). Физические формулы, законы, чаще всего изображаются математическими знаками, в частности векторами. Любая сила, например F тяжести, раскладывается по векторам.

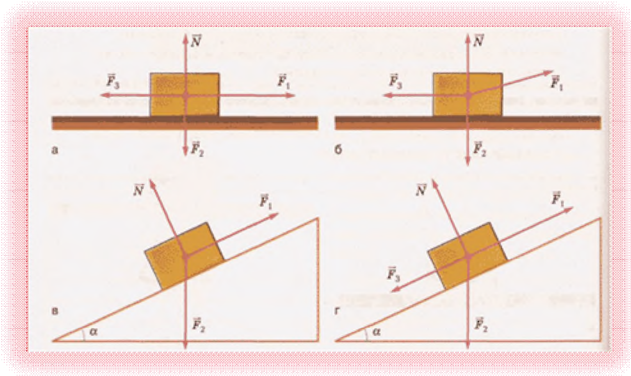


Рисунок 3 – Изображение векторов в физике

Это необходимо при расчётах в строительстве различных сооружений, например в построении моста, через реку.

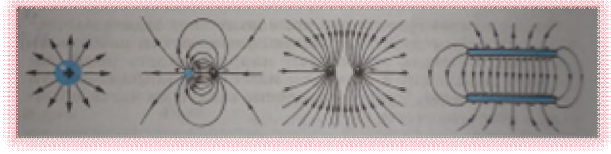


Рисунок 4 – Изображение векторов в физике

Так неправильные расчёты могут привести к трагедиям и многочисленным жертвам. Разложение векторов применяют при расчётах летательных аппаратов, например вектор скорости для круговых орбит (рис.5), в навигации морского и воздушного флота.

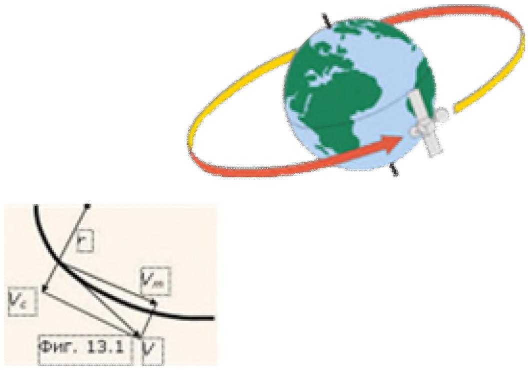


Рисунок 5 – Изображение векторов в навигации

Своё широкое применение векторы получили в химии. Например, рассмотрим электронное строение атома азота (рис.6). Каждый электрон имеет свою собственную характеристику – спин. Спин – собственный момент импульса электрона, не связанный с движением в пространстве. Спины электронов складываются как вектора. Сумма спинов данного числа электронов на подуровне должна быть максимальной. Если в квантовой ячейке находятся два спаренных электрона, то их изображают противоположно направленными векторами.

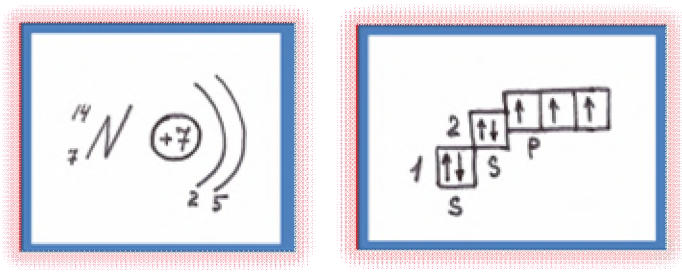


Рисунок 6 – Изображения электронного строения атома

<u>Определение.</u> Обратимыми называются реакции, протекающие в двух взаимно противоположных направлениях. Такие реакции не доходят до конца и заканчиваются установлением химического равновесия, при котором скорости прямой и обратной реакций равны между собой: $N_2+3H_2 \rightleftarrows 2NH_3+Q$.

Обратимые реакции не доходят до конца. Концентрации реагентов уменьшаются, что приводит к уменьшению скорости прямой реакции $\vec{V}$. Скорость же обратной реакции $\overleftarrow{V}$ постоянно возрастает, поскольку увеличиваются концентрации продуктов. Когда скорости прямой и обратной реакции станут одинаковыми ($\vec{V} = \overleftarrow{V}$), наступает состояние химического равновесия. Человек научился направлять обратимые химические реакции в нужную для себя сторону, используя действие таких факторов, как температура, давление, концентрация.

Определение. Диссоциация – распад молекул на ионы. Ассоциация – соединение ионов в молекулу: $\mathbf{HF \rightleftarrows H^{+} + F^{-}}$. Рассмотрим уравнения химических реакций в органической химии.Такие уравнения записывают, использую вектор между левой частью уравнения и правой. Объяснение этому факту состоит в том, что большинство химических реакций между органическими веществами имеют несколько направлений течения. Могут образовываться различные продукты реакции при взаимодействии одних и тех же веществ, только количественное соотношение продуктов реакций различно, поэтому записывают то уравнение химической реакции, в котором продуктами реакции являются вещества, выход которых больше. Это и будет являться основным уравнением. Чтобы указать на существование побочных процессов, используют знак вектора.

Определение.Электролиз - это окислительно-восстановительный процесс, протекающий на электропроводах при прохождении электрического тока через расплав или раствор электролита.Знаком вектора обозначается осадок, т.е. нерастворимое вещество, которое выпадает на дно сосуда, или газ, который уходит вверх, в атмосферный воздух.

Рассмотрим понятие вектора в биологии. Эти векторы изображены на рисунках (рис.7). Это вошь, клещ, крыса.

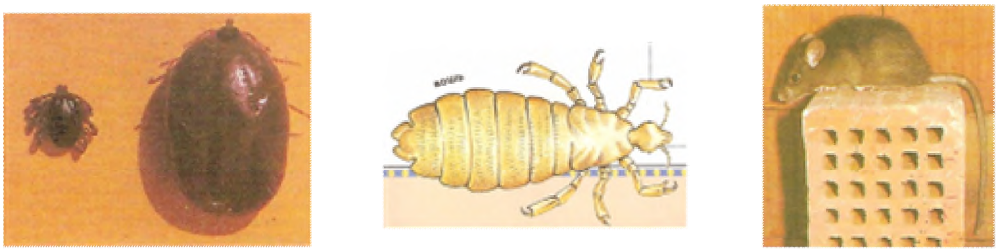


Рисунок 7 – Примеры векторов в биологии

Определение. Вектором (в биологии) называется организм, переносящий паразита от одного организма-хозяина к другому. Например, вши переносят возбудителей сыпного тифа, крысы – чумы, а клещи являются переносчиками вируса, вызывающего энцефалит. Так эти заболевания являются очень опасными для человека, поэтому необходимо досконально изучить механизм их передачи во избежание заражения. Существует ещё одно значение слова «вектор» в биологии. На этот раз немножко коснёмся генной инженерии.

Определение. Вектор – это автономная молекула ДНК, используемая в генной инженерии, для переноса генов от организма-донора в организм-реципиент, а также для клонирования нуклеиновых последовательностей (клонирующий вектор). Вектором, например, является бактериальная плазмида. Плазмиды дают бактериям большие преимущества, например способность синтезировать вещества опасные для других бактерий – антибиотики, а так же быть устойчивыми к антибиотикам своих собратьев. Эти свойства научился использовать в своей деятельности человек, но они так же могут и вредить ей. Например, был получен антибиотик против бактерии, вызывающей туберкулёз, но эта бактерия эволюционировала и приобрела к нему невосприимчивость. Поэтому необходимо снова искать средство, что бы справиться с этой болезнью. Человек создаёт также искусственные векторы.

С помощью векторов синтезируются различные лекарства и антибиотики. Синтезируются ферменты или даже целые каскады ферментов, необходимые человеку (например, инсулин). В генной инженерии существует такое молодое развивающееся направление, как генотерапия, где векторы позволяют исправлять генетические дефекты. Эти молекулы ДНК (векторы) используются также при создании трансгенных растений и животных (например, генетически модифицированные овцы продуцируют человеческий ген альфа 1-антитрипсина в молоке). Люди, наследующие два нефункционирующих гена этого белка, страдают болезнью, называемой альфа 1-антитрипсиновой недостаточностью. Она поражает легкие и иногда печень. Векторы применяются также при клонировании.

С уверенностью можно сказать, что мало кто из людей задумывается о том, что векторы окружают нас повсюду и помогают нам в повседневной жизни. Так, например, во время прогулки в парке, можно заметить, что ель, можно рассматривать как пример вектора в пространстве: нижняя её часть – начало вектора, а верхушка дерева является концом вектора.

Вывески с изображением вектора при посещении больших магазинов помогают нам быстро найти тот или иной отдел и сэкономить время (рис.8).

Рисунок 8 – Примеры вывесок и указателей

Каждый день, выходя из дома, мы становимся участниками дорожного движения в роли пешехода либо в роли водителей. В наше время практически каждая семья имеет машину, что, разумеется, не может не отразиться на безопасности всех участников дорожного движения. И, чтобы избежать казусов на дороге, стоит соблюдать все правила дорожного движения. Но не стоит забывать того, что в жизни всё взаимосвязано и, даже в простейших предписывающих знаках дорожного движения, мы видим указательные стрелки движения, в математике называемые – векторами. На примере знаков: «Движение прямо», «Движение направо», «Движение налево», «Движение прямо и налево» и другие (рис.9, 10).

Эти стрелки (векторы) указывают нам направления движения, стороны движения, стороны объезда, и ещё многое другое. Всю эту информацию можно прочитать на знаках дорожного движения на обочинах дорог.

Не соблюдение этих правил и пренебрежение знаками приводит к необратимым последствиям (автокатастрофам), что, конечно же, не обходится без человеческих жертв, в том числе и детей.

Рисунок 9 –Примеры дорожных знаков

Рисунок 10 –Примеры дорожных знаков

1.1.2 Система координат в пространстве

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X, Yи Z. Зададим удобный масштаб (рис.11).

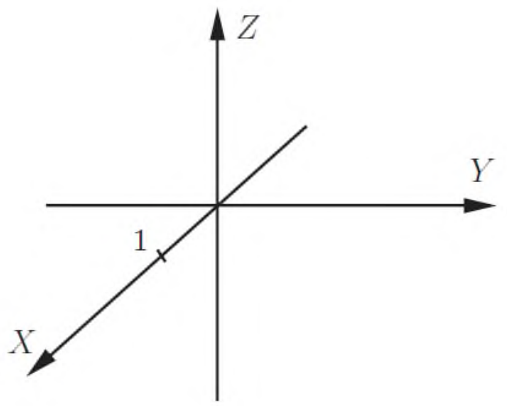


Рисунок 11 –Система координат в пространстве

Получилась система координат в трехмерном пространстве. Теперь каждаяего точка характеризуется тремя числами - координатами по X, Y и Z. Например,запись M(−1; 3; 2) означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна −1,координата по Y (ордината) равна 3, а координата по Z (аппликата) равна 2.Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец (рис.12). Только в пространстве вектор задаетсятремя координатами x, y и z:$\bar{a}(x_a; y_a; z_a)$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости- из координаты конца вычитаем координату начала

, (1)

Длина вектора $\overline{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B.

Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} , \qquad (2)$$

или $$|\overline{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} , \qquad (3)$$

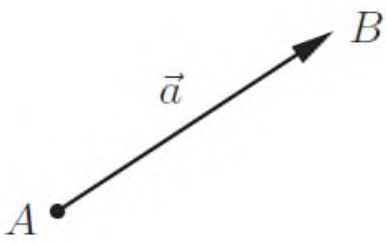


Рисунок 12 – Изображение вектора

Деление отрезка в данном отношении: если $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \lambda$, то для В (x_b;y_b;z_b):

$$x_b=\frac{x_a+\lambda\cdot x_c}{1+\lambda} \qquad y_b=\frac{y_a+\lambda\cdot y_c}{1+\lambda} \qquad z_b=\frac{z_a+\lambda\cdot z_c}{1+\lambda} \tag{4}$$

Пусть точка С— середина отрезка АВ. Ее координаты находятся по формуле:

$$x_c=\frac{x_a+x_b}{2},\ y_c=\frac{y_a+y_b}{2},\ z_c=\frac{z_a+z_b}{2} \tag{5}$$

Для сложения векторов применяем уже знакомые правило треугольника и правило параллелограмма (рис.13).

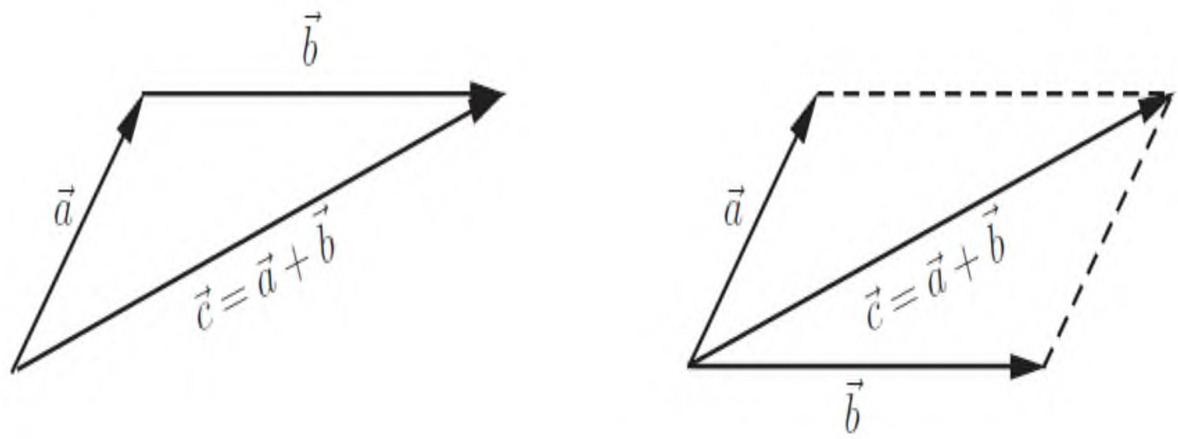


Рисунок 13 – Изображение суммы векторов

Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат недве, а три. Возьмем векторы: $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)\bar{b} = (x_b, y_b, z_b)$

Алгебраическая сумма векторов:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_a \pm x_b, y_a \pm y_b, z_a \pm z_b) \qquad (6)$$

Произведение вектора на число отличное от нуля:

$$\lambda \cdot a = (\lambda \cdot x_a, \lambda \cdot y_a, \lambda \cdot z_a) \qquad (7)$$

Скалярное произведение векторов:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b \qquad (8)$$

Косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$можно найти по формуле:

$$\cos\left(\bar{a}^{\bar{b}}\right) = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|a| \cdot |b|} = \frac{|X_a X_B + Y_a Y_B + Z_a Z_B|}{\sqrt{X_a{}^2 + Y_a{}^2 + Z_a{}^2} \cdot \sqrt{X_b{}^2 + Y_b{}^2 + Z_b{}^2}} \qquad (9)$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве. Особенно если эти прямые — скрещиваются. Напомним, что так называютсяпрямые, которые не параллельны и не пересекаются. Они лежат в параллельныхплоскостях.

<u>Определение.</u>Коллинеа́рность—отношение параллельности векторов: два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Допусти́м синоним — «параллельные» векторы.

<u>Определение.</u>Три вектора(или большее число) называются компланарными, если они, будучи приведенными к общему началу, лежат в одной плоскости.

Признак коллинеарности: если существует такое k, что $\bar{a} = k \times \bar{b}$, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Если k> 0, то $\bar{a}$ - - $\bar{b}$; если k< 0, то $\bar{a}$ - ¯ $\bar{b}$. Если векторы $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны, то

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} \qquad (10)$$

Признак компланарности: если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - неколлинеарные, то " некомпланарный с ними $\bar{c}$ можно единственным образом представить в виде $\bar{c} = x \times \bar{a} + y \times \bar{b}$.Если имеется разложение $\bar{d} = x \times \bar{a} + y \times \bar{b} + z \times \bar{c}$, то $\bar{d} = (x; y; z)$ - координаты вектора d. Тогда $\bar{a} = x \times \bar{i} + y \times \bar{j} + z \times \bar{k}$ - разложение вектора a в ортогональном (прямоугольном) базисе.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 0 \qquad (11)$$

Направляющие косинусы:

$$\mathrm{Cos}\,a = \frac{x}{|a|} \qquad \mathrm{Cos}\,b = \frac{y}{|a|} \qquad \mathrm{Cos}\,g = \frac{z}{|a|} \qquad (12)$$

a, b, g - углы междурадиус – вектором а и соответствующими осями координат, *x*, *y*, *z* – координаты вектора а (абсцисса, ордината, аппликата соответственно).

Для нахождения площади треугольника *ABC* используется геометрический смысл модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, на которых построен треугольник *ABC*: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{\overline{AB}} & y_{\overline{AB}} & z_{\overline{AB}} \\ x_{\overline{AC}} & y_{\overline{AC}} & z_{\overline{AC}} \end{vmatrix} = \qquad (13)$$

Для нахождения объема пирамиды *ABCD*, используется геометрический смысл смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, на которых построена пирамида:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} x_{\overline{AB}} & y_{\overline{AB}} & z_{\overline{AB}} \\ x_{\overline{AC}} & y_{\overline{AC}} & z_{\overline{AC}} \\ x_{\overline{AD}} & y_{\overline{AD}} & z_{\overline{AD}} \end{vmatrix} =$$

$$-y_1(AC)^{-} \cdot x_1(AD)^{-}) \qquad (14)$$

Построение точки в пространстве изображено на рисунке 14.

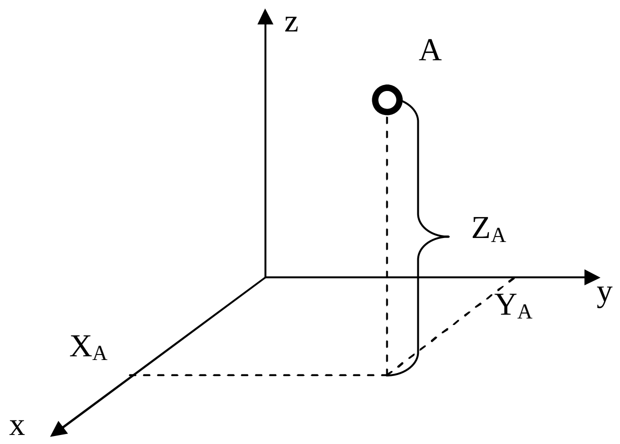


Рисунок 14-Построение точек в пространстве.

*Пример 1.*В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K - середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

*Решение.*Куб отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж (рис. 15):

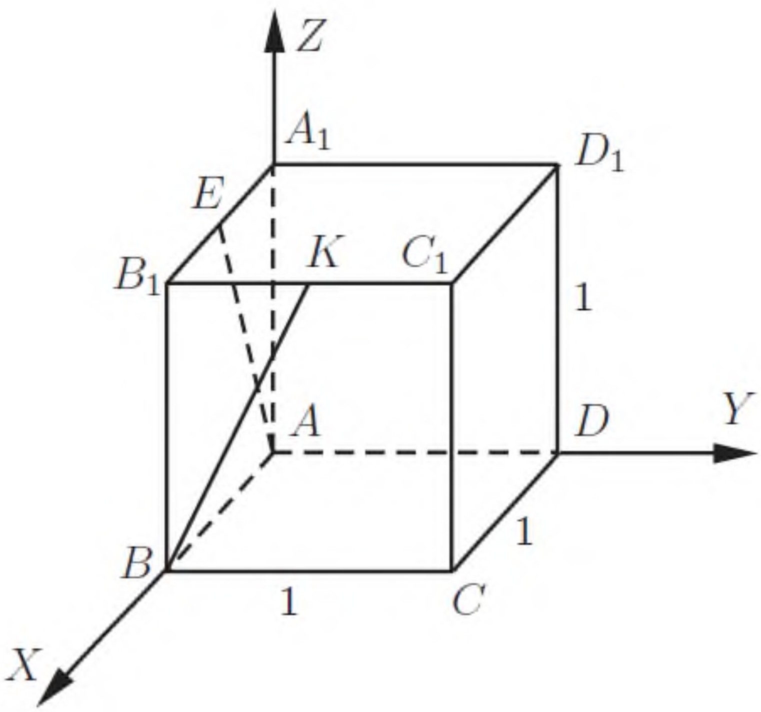


Рисунок 15 – Чертеж к задаче

Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от неене зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.Прямые AE и BK - скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$.

Для этого нужны их координаты: $A(0;0;0)$, $E\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $B(1;0;0)$, $K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$.

Запишем координаты векторов: $\overline{AE}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overline{BK}=\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

и найдем косинус угла между векторами $\overline{AE}$, $\overline{BK}$:

$$\cos\left(\overline{AE}^{\,BK}\right)=\frac{\left|\overline{AE}\cdot\overline{BK}\right|}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{4}{5}$$

Пример2. Даны точки: A(4; -3; 5), B(6; -2; 3;), C(1; 2; 8), D(4; -2; 1). Найти: 1) координаты вектора $\overline{AB}$, его длину и направляющие косинусы; 2) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; 3) площадь треугольника *ABC*; 4) объем пирамиды *ABCD*.

*Решение. 1)*Найдем координаты вектора $\overline{AB}$ по формуле

$$\overline{AB}=(X_B-X_A;\ Y_B-Y_A;\ Z_B-Z_A)=\left(6-4;\ -2-(-3);3-5\right)=(2;1;\ -2).$$

Длину вектора $\overline{AB}$ вычислим по формуле $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$,

где *X*, *Y*, *Z* – координаты вектора. Имеем: $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$.

Направляющие конусы вектора $\overline{AB}$ найдем по формулам: $\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overline{AB}\right|}$,

$\cos\beta=\frac{y}{\left|\overline{AB}\right|}$, $\cos\gamma=\frac{z}{\left|\overline{AB}\right|}$. Получаем: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$

2) Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ можно найти по формуле: $\cos\vartheta=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|}$. Найдем координаты вектора $\overline{AD}$ и его длину:

$$\overline{AD}=\left(4-4;\ -2-(-3);1-5\right)=(0;1;\ -4);$$

$$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}\approx 4{,}12.$$

Таким образом, $\cos\vartheta=\frac{2\cdot 0+1\cdot 1+(-2)\cdot(-4)}{3\cdot 4{,}12}\approx 0{,}7281$.

Тогда $\vartheta = \arccos 0{,}7281 \approx 43^\circ$.

3) Для нахождения площади треугольника *ABC* используем геометрический смысл модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, на которых построен треугольник *ABC*: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right|$

Найдем координаты векторов $\overline{AC}$, а затем векторное произведение векторов:

$\overline{AC} = (1-4; 2+3; 8-5) = (-3; 5; 3);$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 13\bar{i} - 0\bar{j} + 13\bar{k}$$

$\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right| = \sqrt{13^2 + 0^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 13\sqrt{2} \approx 9{,}19$ (кв. ед)

4) Найдем объем пирамиды *ABCD*, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, на которых построена пирамида:

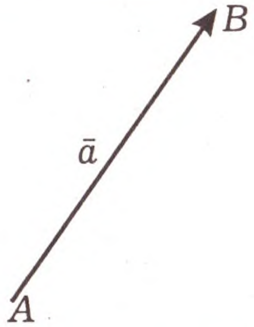
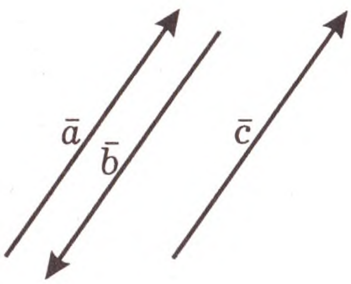
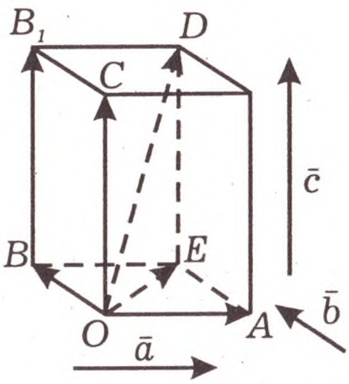
$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|.$$

Найдем смешанное произведение векторов:

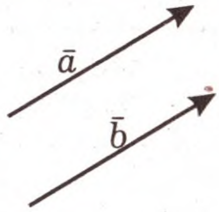
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -52;$$

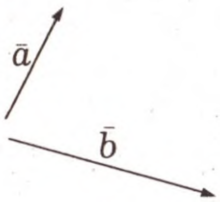
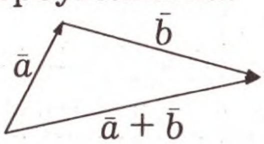
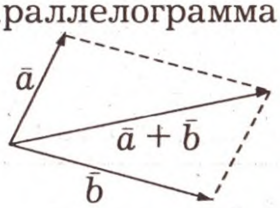
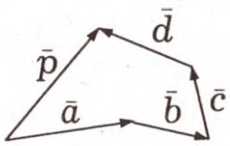
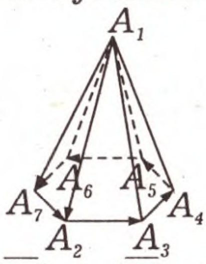
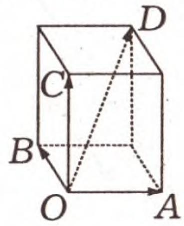
Задание для студентов. Сделать конспект по плану, представленному в таблице 1.

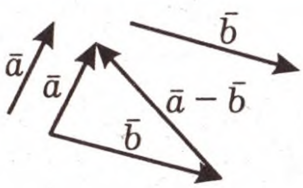
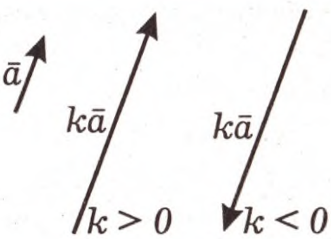
Таблица 1 – Векторы

Определение	**Модуль вектора (длина вектора)**
 направленный отрезок $\overline{AB}$ или $\bar{a}$	$\lvert\overline{AB}\rvert$ или $\lvert\bar{a}\rvert$
Коллинеарные векторы	**Компланарные векторы**
 (векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной) $\bar{a}$ и $\bar{c}$ – сонаправленные $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – противоположно направленные векторы	 (если лежат в одной плоскости или имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости) $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OE}$, $\overline{BB_1}, \overline{OD}, \overline{OE}$, компланарные векторы. $\overline{OA}, \overline{OD}, \overline{OC}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – не компланарные векторы

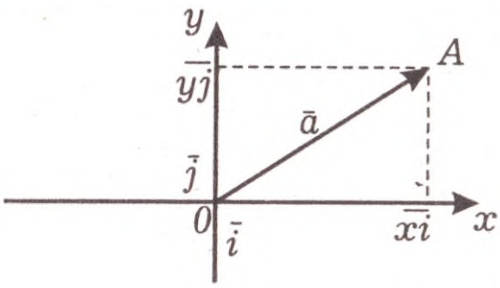
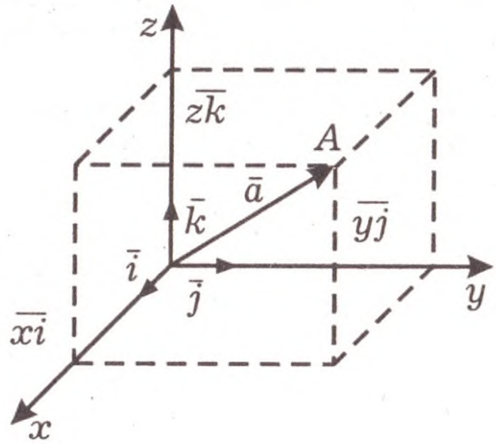
Продолжение таблицы 1

Нуль вектор	Единичный вектор	Равенство векторов
$\bar{0}$ когда начало вектора $\overline{AB}$ и конец его совпадают $\bar{0}$ коллинеарен с любым вектором.	Вектор, длина которого равна 1	 $\bar{a} = \bar{b}$ если они сонаправлены и $\lvert\bar{a}\rvert = \lvert\bar{b}\rvert$

Сложение векторов		
	правило треугольника 	правило параллелограмма 
 $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = \bar{p}$	правило многоугольника  $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_6A_7} = \overline{A_1A_7}$	правило параллелепипеда  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OD}$

Разность векторов	Умножение вектора на число
	

продолжение таблицы 1

Координаты вектора	
на плоскости	**в пространстве**
	
Каждый вектор можно разложить по единичным векторам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	
$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$	$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$
числа	
$(x\ ;\ y)$	$(x\ ;\ y;\ z)$
называются координатами вектора $\bar{a}$	
Если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, то $\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Если $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$. $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Действия с координатами векторов	
$\bar{a}(a_1;a_2), \bar{b}(b_1;b_2)$	$\bar{a}(a_1;a_2;a_3), \bar{b}(b_1;b_2;b_3)$
$a)\ \bar{a} \pm \bar{b} = \bar{c}$	
$\bar{c}(a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2)$	$\bar{c}(a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$

продолжение таблицы 1

б) $\lambda\overline{a}=\overline{c}$	
$\overline{c}(\lambda a_1;\ \lambda a_2)$	$\overline{c}(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$
в) $\overline{a}=\overline{b}$	
$(\overline{a_1;\ a_2})=(\overline{b_1;\ b_2})$	$(\overline{a_1;\ a_2;\ a_3})=(\overline{b_1;\ b_2;\ b_3})$
Скалярное произведение векторов	
$\overline{a}(a_1;a_2),\ \overline{b}(b_1;b_2)$	$\overline{a}(a_1;a_2;a_3),\ \overline{b}(b_1;b_2;b_3)$
называется число, равное сумме произведений соответствующих координат, т. е.	
$a_1b_1+a_2b_2$	$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
вычисляется: $\overline{a}\cdot\ \overline{b}=\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\cdot\cos\varphi\ \Rightarrow\ \cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\ \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\ \lvert\overline{b}\rvert}$	
$\lvert\overline{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\ \lvert\overline{b}\rvert=\sqrt{b_1^2+b_2^2},\ \lvert\overline{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ \lvert\overline{b}\rvert=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$	
Признак перпендикулярности двух векторов	
Если $\overline{a}\cdot\ \overline{b}=0$, то $\overline{a}\perp\ \overline{b}$ и, обратно, если $\overline{a}\perp\ \overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\ \overline{b}=0$. $(\overline{a}\neq\overline{0}$ и $\overline{b}\neq\overline{0})$	
Признак коллинеарности двух векторов	**Признак компланарности трех векторов**
Если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$, где $\overline{a}(a_1;a_2;a_3),\ \overline{b}(b_1;b_2;b_3)$, $(\overline{a}\neq\overline{0}$ и $\overline{b}\neq\overline{0})$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.	Если $\overline{c}=x\overline{a}+y\overline{b}$, где $x;\ y$ – некоторые числа, то $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ – компланарны.

1.1.3 Прямая и плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве задается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (15)$$

Здесь числа A, B и C _ координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости. Его называют нормалью к плоскости (рисунок 16).

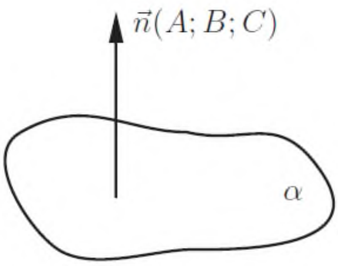


Рисунок 16 – Изображение нормали к плоскости

Вместо x, y и z можно подставить в уравнение координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости. Получится верное равенство. Плоскость в пространстве можно провести через любые три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для того, чтобы написать уравнение плоскости, берем координаты трех принадлежащих ей точек. Подставляем их по очереди в уравнение плоскости. Решаем полученную систему. Покажем, как это делается.

*Пример 3.*Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки M (1; 0; 1), N (2; −2; 0)и K (4; 1; 2).

Решение. Уравнение плоскости выглядит так: Ax+ By+ Cz+ D = 0. Подставим в него по очереди координаты точек M, N и K.

Для точки M: $A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0$, $A + C + D = 0$

Для точки N: $A \cdot 2 + B(-2) + C \cdot 0 + D = 0$,

Аналогично для точки K:

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ 2A - 2B + D = 0 \\ 4A + B + 2C + D = 0 \end{cases}$$

В ней четыре неизвестных: A, B, C и D. Поэтому одну из них мы выберем сами, а другие выразим через нее. Правило простое - вместо одной из переменных можно взять любое число, не равное нулю.

Пусть, например, D = −2. Тогда:

$$\begin{cases} A + C - 2 = 0 \\ 2A - 2B - 2 = 0 \\ 4A + B + 2C - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 2A - 2B = 2 \\ 4A + B + 2C = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A - B = 1 \\ 4A + B + 2C = 2 \end{cases}$$

Выразим C и B через A и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} C = 2 - A \\ B = A - 1 \\ 4A + (A - 1) + 2 \cdot (2 - A) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C = \frac{7}{3} \\ B = -\frac{4}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Уравнение плоскости MNK имеет вид:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{7}{3}z - 2 = 0$$

Умножим обе части уравнения на −3. Тогда коэффициенты станут целыми:

$$x + 4y - 7z + 6 = 0$$

Вектор $\overline{n}$(1; 4; −7) - это нормаль к плоскости MNK.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M (x_0, y_0, z_0), имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (16)$$

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} \qquad (17)$$

Не правда ли, знакомая формула? Скалярное произведение нормалей поделилина произведение их длин.Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуется четыре угла (рис.17).

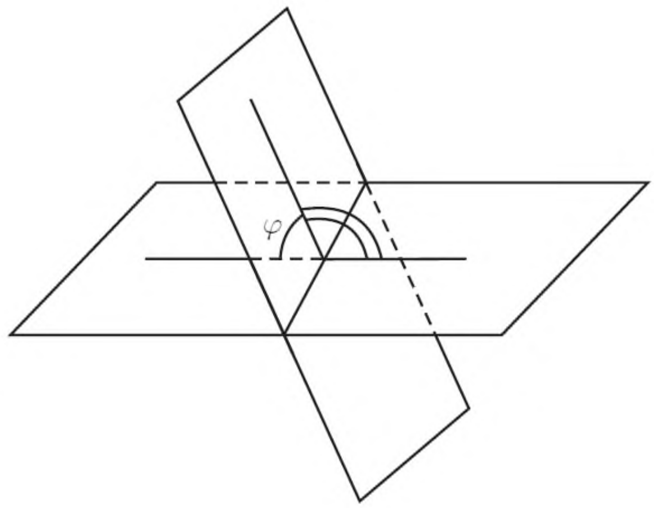


Рисунок 17 – Пересечение двух плоскостей

Мы берем меньший из них. Поэтому в формуле стоит модуль скалярного произведения, чтобы косинус угла был не отрицателен.Угол между прямой m и плоскостью α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов. Пусть $\bar{a}$- вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\bar{n}$ - нормаль к плоскости α (рис.18).

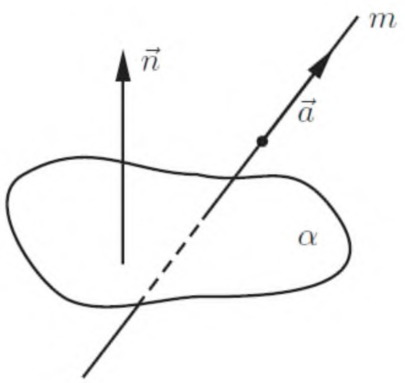


Рисунок 18 – Пересечение двух плоскостей

Находим синус угла между прямой m и плоскостью α по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{n}\cdot\bar{a}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|} \qquad (18)$$

*Пример 4.*В кубе ABCDA1B1C1D1 точка E - середина ребра A1B1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD1.

Решение. Рисуем чертеж и выбираем систему координат (рис.19).

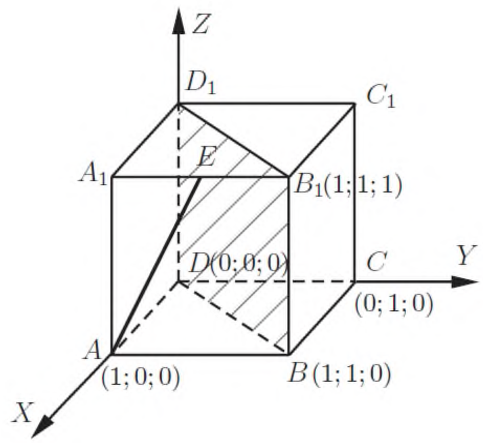


Рисунок 19 – Пересечение двух плоскостей

Так как $A(1,0,0), E\left(\frac{1,1}{2,1}\right)$. Значит находим координаты вектора $\overline{AE} = \left(\frac{0,1}{2,1}\right)$. Нужно ли нам уравнение плоскости BDD1? В общем-то, без него можно обойтись. Ведь эта плоскость является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например, вектор$\overline{AC} =$ (1; −1; 0).

Найдем угол между прямой и плоскостью:

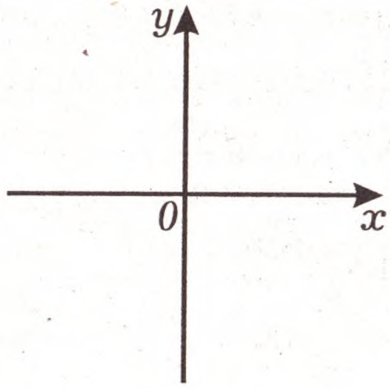
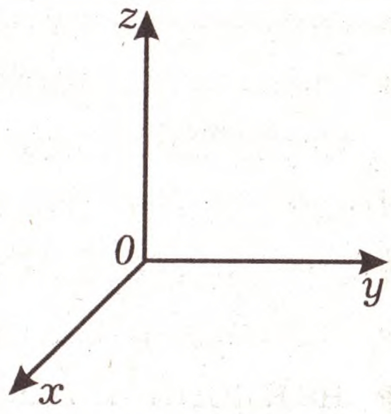
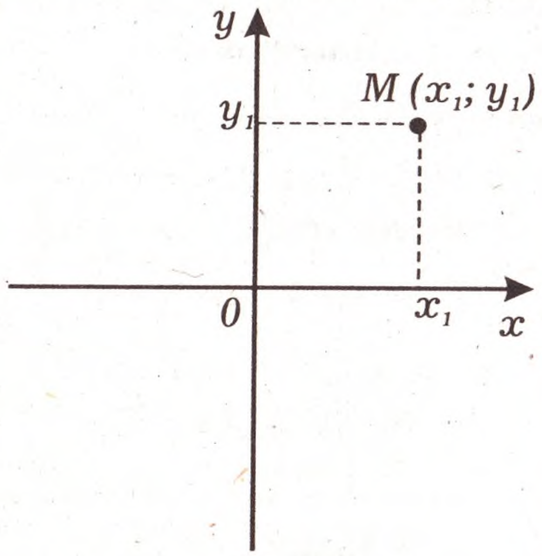
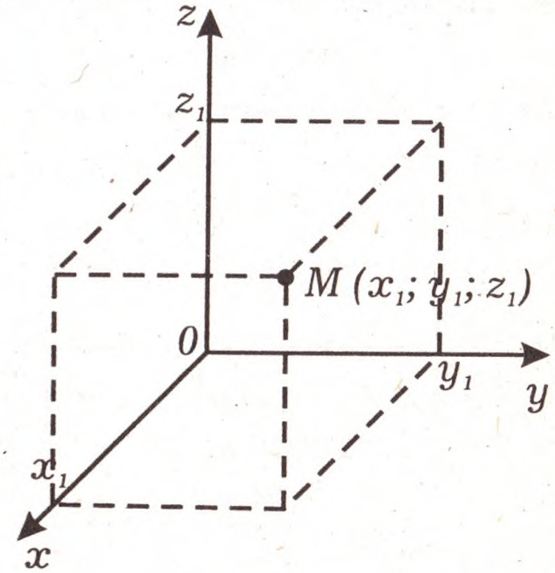
$$\sin\varphi = \frac{|\overline{AC}\cdot\overline{AE}|}{|\overline{AC}|\cdot|\overline{AE}|} = \frac{\left|0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) + 1\cdot 0\right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Расстояние от точки M с координатами x_0, y_0 и z_0 до плоскости α, заданной уравнением Ax + By + Cz + D = 0, можно найти по формуле:

$$h = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|/\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)} \quad (19)$$

Задание для студентов. Сделать конспект по плану, представленному в таблице 2.

Таблица 2 – Координаты точек

Прямоугольная система координат	
На плоскости	**В пространстве**
 Ox – ось абсцисс Oy – ось ординат	 Ox – ось абсцисс Oy – ось ординат Oz – ось аппликат
Координаты точки	
	
Координаты середины отрезка A_1A_2	
$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Продолжение таблицы 2

Расстояние между точками A_1 и A_2	
$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$. $\lvert A_1A_2\rvert = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)}$	$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$. $\lvert A_1A_2\rvert =$ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$
Уравнения:	
окружности	**сферы**
Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, есть окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса r	Множество точек $(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют условию $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, есть сфера радиуса R с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$
Уравнения:	
прямой Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где a, b, c некоторые числа, $a \neq 0$ и $b \neq 0$ одновременно, есть прямая. или $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, где: x, y – переменные, $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – координаты точек, через которые проходит прямая плоскости	**плоскости** Множество точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c, d – некоторые числа, причем $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, есть плоскость.

1.3 Стереометрия. Аксиомы и следствия. Прямые и плоскости

Определение. Геометрия– это наука, которая изучает свойства геометрических фигур. Геометрическая фигура – это любая совокупность точек. Геометрия подразделяется на *планиметрию* и на *стереометрию*, которую мы начинаем изучать.

Мы начнем изучение стереометрии с основных понятий, основных фигур, аксиом, точно также как это делалось в планиметрии.

Основными фигурами стереометриия являются точка, прямая, плоскость. Примеры стереометрических фигур: шар, сфера, конус, цилиндр, параллелепипед и т.д. (рис. 20).

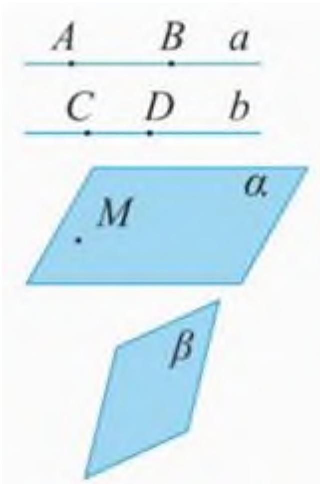


Рисунок 20 – Фигуры стереометрии

A, B, C, D– точки. Точки обозначаются прописными латинскими буквами.

AB =a, *CD* = *b*– прямые. Прямые обозначаются строчными латинскими буквами.

α,β– плоскости. Плоскости обозначаются греческими буквами. (Рис. 1).

Рассмотрим прямую a. На ней лежат точки*A*и *B*. Прямая a может быть также обозначена как *AB*.Рассмотрим прямую *b*, на ней лежат точки*C*и *D*. Прямая *b* может быть также обозначена как *CD*.

Специфика всей стереометрии заключается в том, что пространственные фигуры мы будем изображать на плоскости.

Так же, как и в планиметрии, важен знак принадлежности, $\in$. Например, точка*A*принадлежит прямой: $A \in a$.

Рассмотрим плоскость α(Рис. 20). Точка *M* принадлежит плоскости α: $M \in \alpha$. А вот прямая а не принадлежит плоскости α: $a \notin \alpha$.

Аксиомы стереометрии.

Аксиома 1 (А1). Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна (рис. 21).

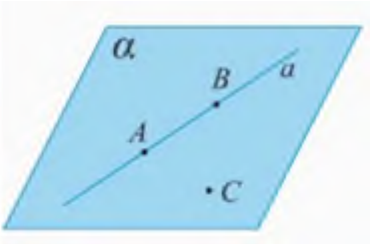


Рисунок 21 – Пояснение к А1

Рассмотрим три точки:*A*, *B*, *C*, причем точка*C*не принадлежит прямой *AB*:$C \notin AB$ (Рис. 2). Тогда через три точки*A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость α, и притом только одна.

Плоскость α можно также обозначить через три точки*ABC*.

Аксиома 2 (А2). Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

По-иному говорят, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую. Рассмотрим плоскостьα, точки*A*, *B*прямой а принадлежат плоскости α (Рис. 22).

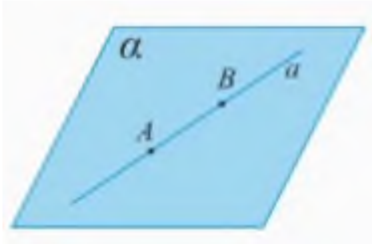


Рисунок 22 – Пояснение к А2

Аксиома утверждает – все точки прямой а (прямой AB) принадлежат плоскости α, т.е. вся прямая лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую а. Смысл заключается в следующем: из того, что только две точки принадлежат плоскости, вытекает, что бесчисленное множество точек прямой лежат в этой плоскости.Эту аксиому можно записать следующим образом: $\begin{cases} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{cases} \Rightarrow AB \in \alpha$

Следствие: Может ли быть только три общие точки у прямой и плоскости? Нет, не может быть. Может быть две точки, и тогда вся прямая лежит в плоскости.

Если у прямой и плоскости одна общая точка M, то тогда говорят, что прямая а и плоскость α пересекаются в точке M (Рис. 23). Этот факт записывается следующим образом: $a \cap \alpha = M$.

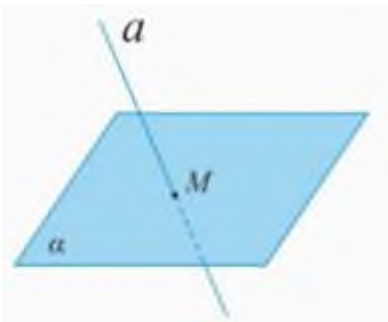


Рисунок 23 – Пояснение к следствию

Аксиома 3 (А3).Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. Говорят, что плоскости пересекаются по прямой. Имеем разные плоскости: плоскость α, плоскость β. Известно, что они имеют общую точку *M*, точка *M* принадлежит плоскости αи плоскости β. (Рис. 24)

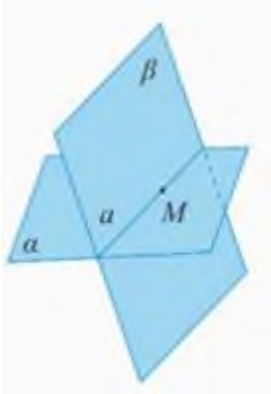


Рисунок 24 – Пояснение к А3

Отсюда вытекает, что существует прямая a, которая проходит через точку *M*, которая одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости β. Вот в этом случае и говорят, что плоскости α и β пересекаются по прямой a.

$$\begin{cases} M \in \alpha \\ M \in \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap \beta = a.$$

Смысл аксиом разъясняется в многочисленных вопросах и задачах. Вот некоторые из них.

Пример 5.Дан тетраэдр *ABCD* (Рис. 25). Даны следующие точки: точка *E* – внутренняя точка ребра *AB*, точка *P* – внутренняя точка отрезка *ED*, точки *M* и *K*, соответственно, на ребрах *BD* и *DC*.

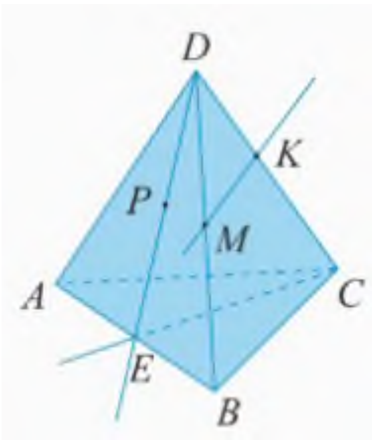


Рисунок 25 – Рисунок к задаче

Задача 1

а) В какой плоскости лежит прямая PE?

Ответ$PE \in ABD$. Прямая *PE* лежит в плоскости *ABD*, так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка *E* лежит в плоскости *ABD* и точка *P* лежит в этой же плоскости. Значит, по второй аксиоме все точки прямой *PE* лежат в плоскости *ABD*.

б) В какой плоскости лежит прямая MK?

Ответ:$MK \in DBC$. Прямая *MK* лежит в плоскости *DBC*, так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка *M* лежит в плоскости DBC и точка *K* лежит в плоскости *DBC*. По второй аксиоме все точки прямой *MK* лежат в плоскости *DBC*.

в) В каких плоскостях лежит прямая BD?

Ответ: Прямая *BD* лежит в плоскости*BDA* и в плоскости *BDC*. Значит, прямая *BD* одновременно лежит в двух плоскостях. Прямая *BD* есть линия пересечения двух плоскостей. Говорят, что грани *ABD*, *BDC* пересекаются по прямой *BD*. Это можно записать так:

$$\begin{matrix} BD \in BDC \\ BD \in BDA \end{matrix} \Rightarrow BD = BDC \cap BDA$$

г) В каких гранях лежит прямая AB?

Ответ: Прямая *AB* лежит в грани *ABC* и в грани *ABD*. Значит, прямая AB есть линия пересечения двух этих граней.

$$\begin{matrix} AB \in ABC \\ AB \in ABD \end{matrix} \Rightarrow AB = ABC \cap ABD$$

д) В каких гранях лежит прямая EC?

Ответ: Прямая EC лежит в плоскости ABC и в плоскости ECD, так как точки E и C лежат одновременно в плоскости ABC и в плоскости ECD. Значит, прямая EC есть линия пересечения этих плоскостей.

$$\begin{matrix} EC \in ABC \\ EC \in ECD \end{matrix} \Rightarrow EC = ECD \cap ABC$$

Задача 2.

а) Найдите точку пересечения прямой *DK* с плоскостью *ABC*.

Решение:

Прямая *DK* содержит точку *C*. Плоскость *ABC* содержит точку *C*. Значит, прямая *DK* и плоскость *ABC* пересекаются в точке *C*.

б) Найдите точку пересечения прямой *CE* с плоскостью *ADB*.

Решение:

Точка *E* принадлежит и прямой *CE*, и плоскости *ADB*. Значит, Прямая *CE* пересекается с плоскостью *ADB* в точке *E*.

Задача 3.

а) Найдите точки, лежащие одновременно в плоскостях *ADB* и *DBC*.

Решение:

Точка B и точка D одновременно лежат и в *ADB*, и в *DBC*. Значит, $ADC \cap DBC = DB$. Все точки прямой *DB* являются ответом.

б) Найдите прямые, по которым пересекаются плоскость *ADB* и *DBC*.

Решение:

Точка *B* и точка *D* одновременно лежат и в *ADB*, и в *DBC*. Значит, прямая *DB* есть прямая, по которой пересекаются заданные плоскости.

в) Назовите прямые, по которым пересекаются плоскости *ADB* и *CDA*.

Решение:

Точки *A*, *D* лежат в плоскости *ADB*, а также точки *A*, *D* лежат в другой плоскости *CDA*. Значит, *AD* – линия их пересечения: $ADB \cap CDA = AD$.

г) Назовите прямые, по которым пересекаются плоскости *PDC* и *ABC*.

Решение:

Плоскость*PDC*совпадает с плоскостью*EDC*. Точка*E*и точка*C*одновременно лежат в двух плоскостях:*PDC*и*ABC*. Значит, *CE*– это линия пересечения двух плоскостей.

$PDC \cap ABC = EC$

Итак, мы рассмотрели предмет стереометрии, три основные аксиомы, их применение. На этих аксиомах строится все грандиозное здание стереометрии.

Задание для студентов. Сделать конспект по плану, представленному в таблицах 3, 4, 5,6.

Таблица 3 – Введение в стереометрию. Аксиомы. Следствия

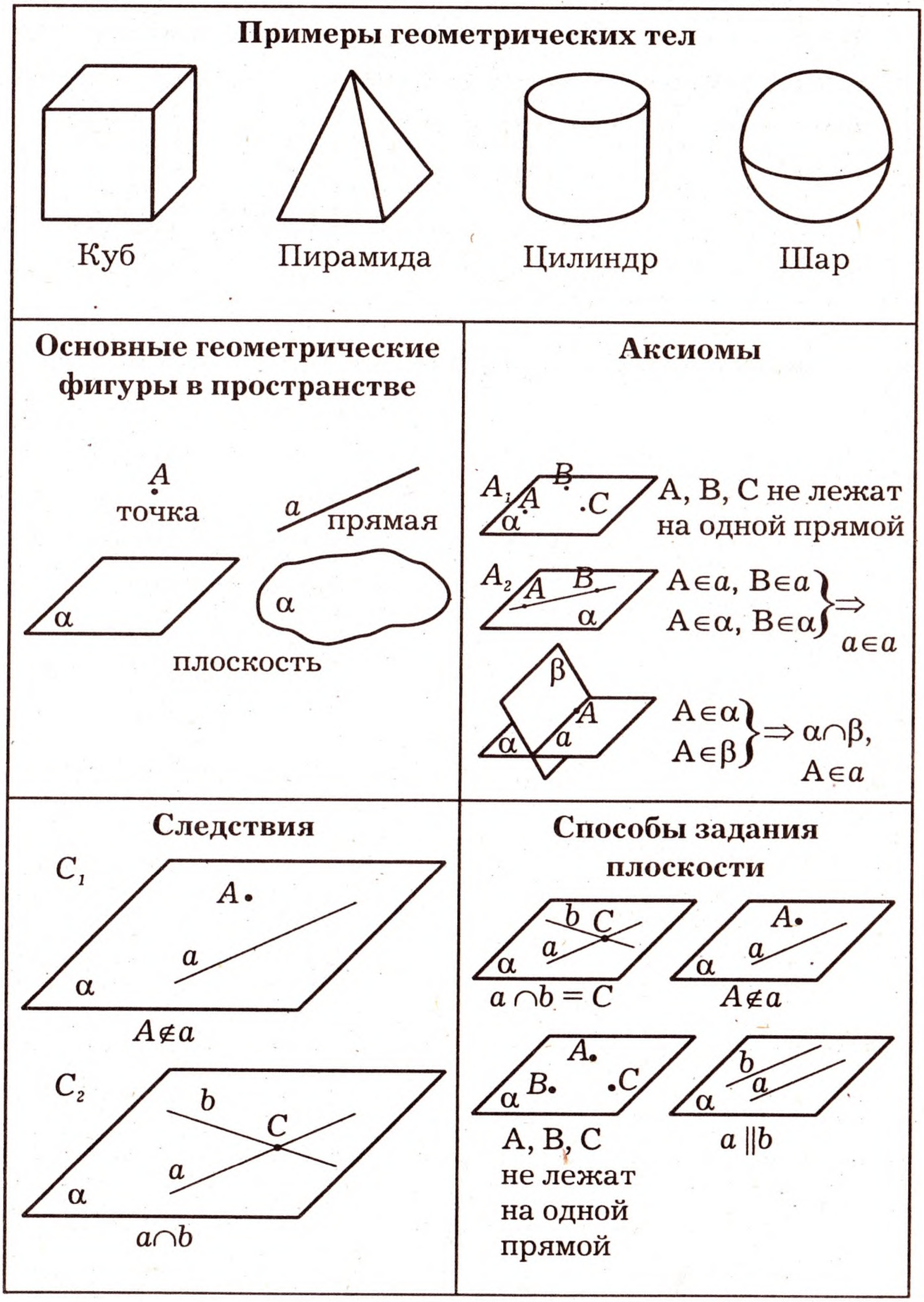
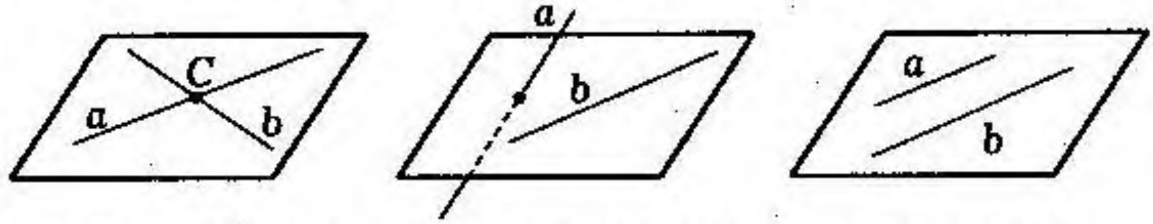


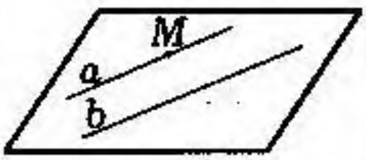
Таблица 4 – Параллельность прямых и плоскостей

Взаимное расположение прямых в пространстве.

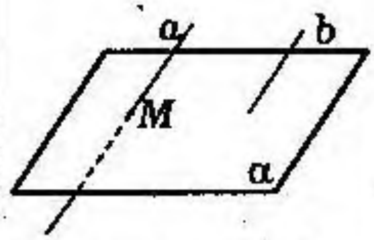


пересекающиеся прямые	скрещивающиеся прямые	параллельные прямые

Через точку вне данной прямой можно провести ...

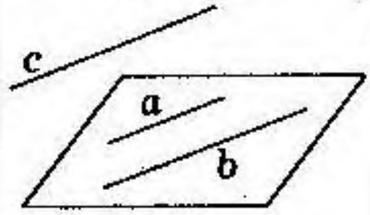


Лемма



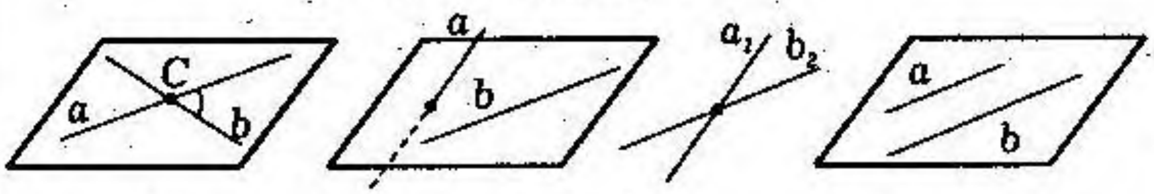
Если $a \parallel b$ и $a \cap \alpha$ то $b \cap \alpha$.

Признак параллельности прямых



Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$ то $a \parallel b$

Угол между прямыми



Если $a \cap b = C$, то берется угловая мера меньшего угла

Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны данным прямым.

Если $a \parallel b$ то угол равен 0

продолжение таблицы 4

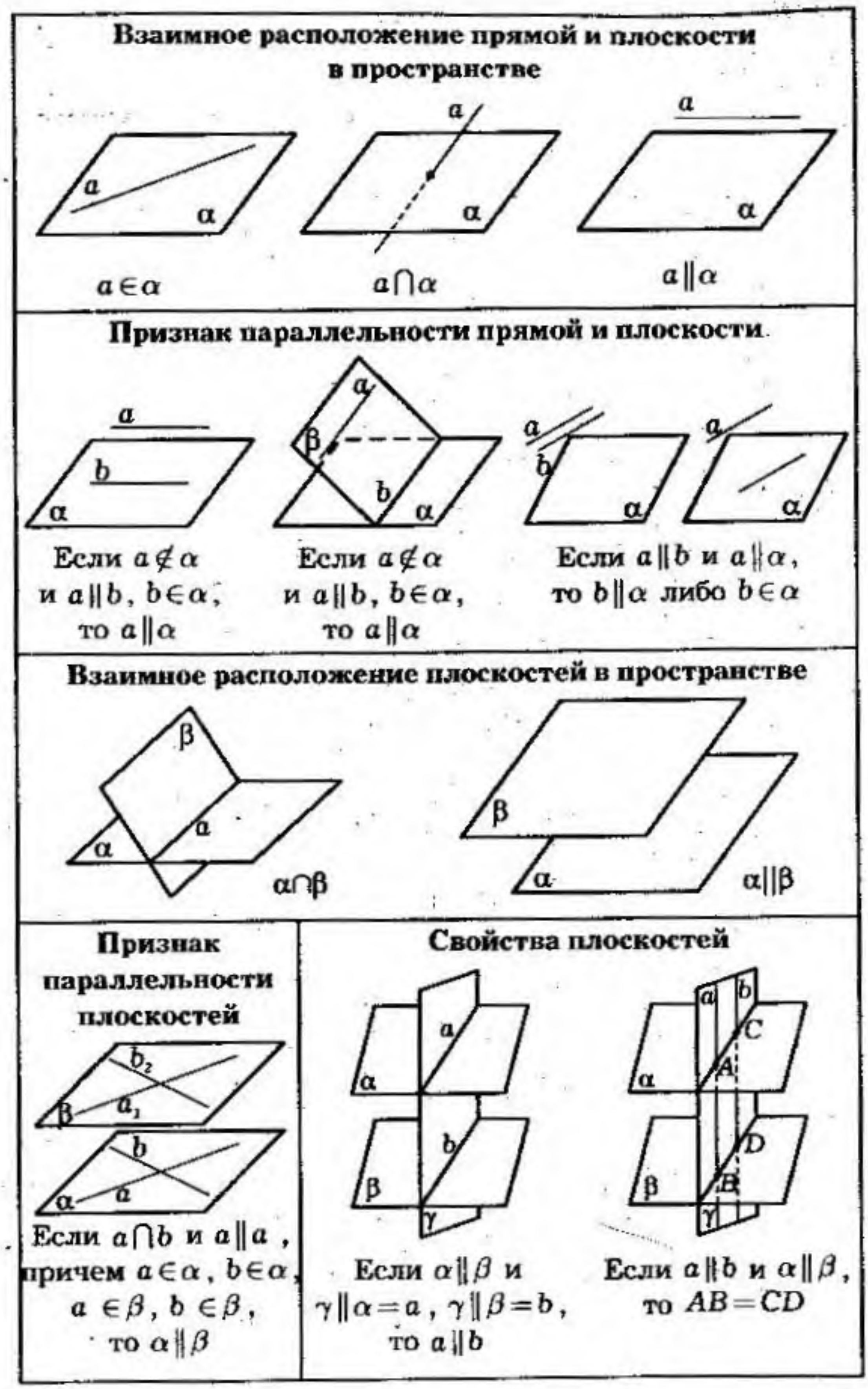
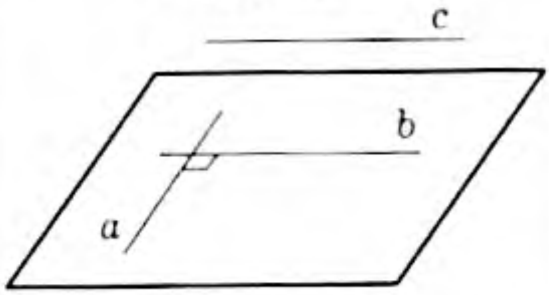


Таблица 5 – Перпендикулярность прямых и плоскостей

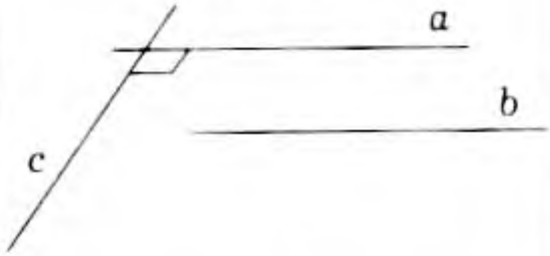
Перпендикулярные прямые в пространстве

Определение



$a \perp b$, $a \perp c$, если угол между ними 90°

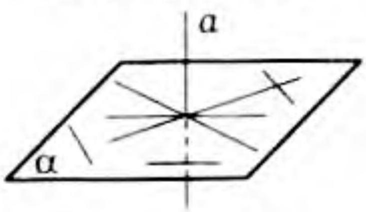
Лемма



Если $a \parallel b$ и $a \perp c$, то $b \perp c$

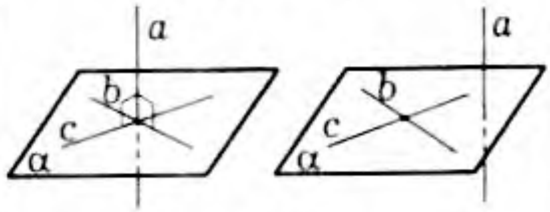
Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение



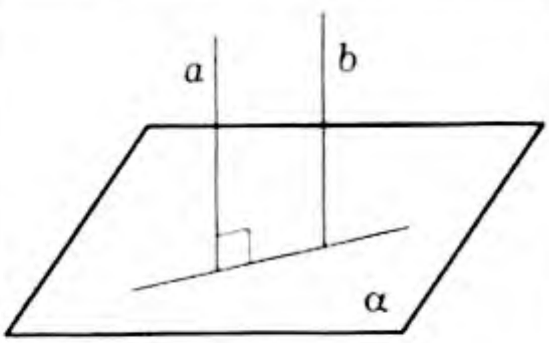
$a \perp \alpha$, если прямая a перпендикулярна любой прямой плоскости

Признак

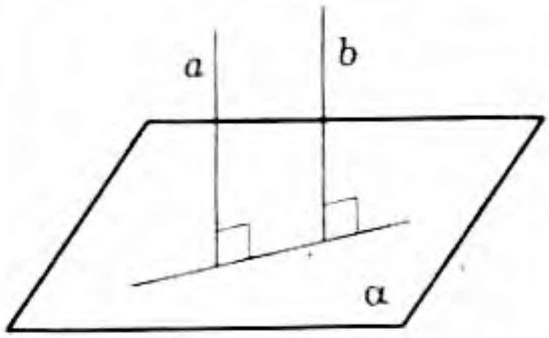


Если $a \perp b$, $a \perp c$, $b \cap c$, $b \in \alpha$, $c \in \alpha$, то $a \perp \alpha$

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости



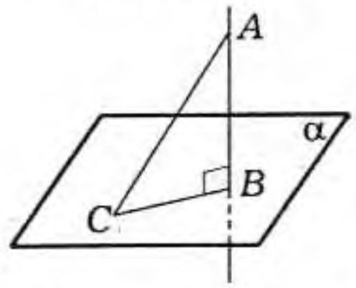
Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$



Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

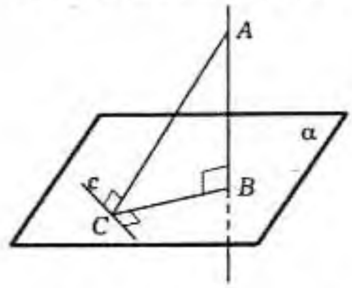
продолжение таблицы 5

Перпендикуляр и наклонная



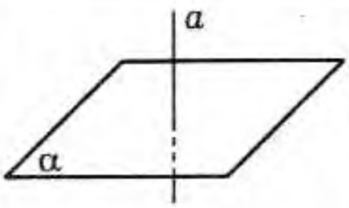
AB – перпендикуляр;
AC – наклонная;
BC – проекция наклонной

Теорема о трех перпендикулярах

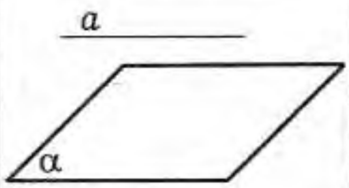


Если $c \in \alpha$, $C \in c$ и $c \perp BC$, то $c \perp AC$ и, обратно, если $c \perp AC$, то $c \perp BC$

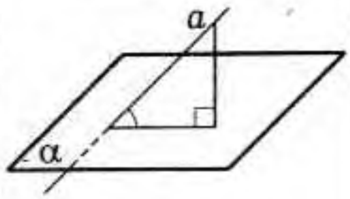
Угол между прямой и плоскостью.



Если $a \perp \alpha$, то угол между прямой и плоскостью равен 90°

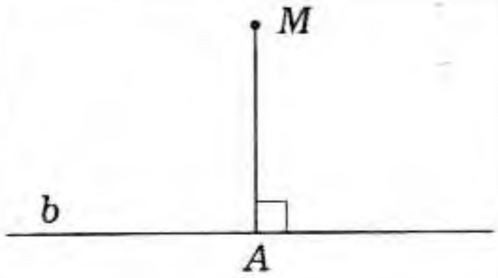


Если $a \parallel \alpha$, то угол между прямой и плоскостью равен 0°

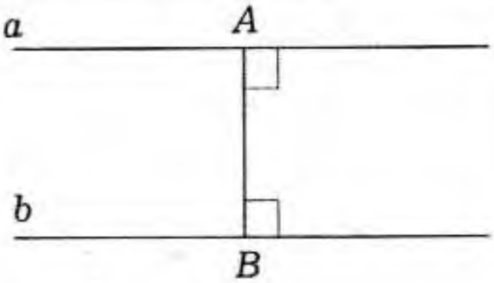


Если $a \cap \alpha$, то угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на плоскость

Расстояние между прямыми и плоскостями.

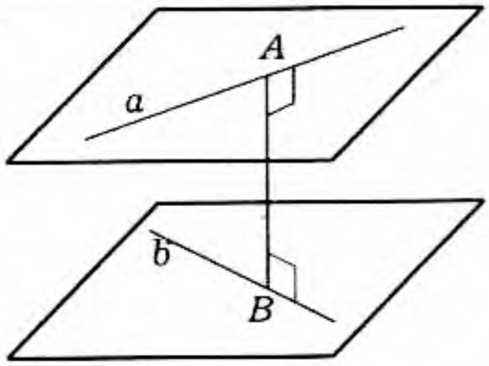


Расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра AM

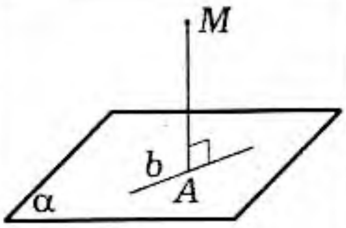


Если $a \parallel b$, то расстояние между ними равно длине перпендикуляра AB

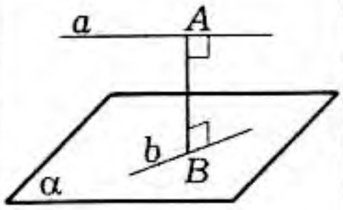
продолжение таблицы 5



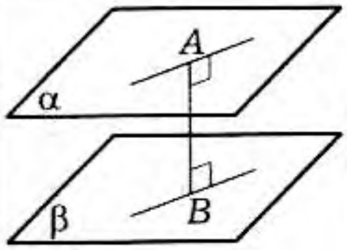
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые, т.е. длине общего перпендикуляра AB



Расстояние от точки до плоскости есть длина перпендикуляра AM

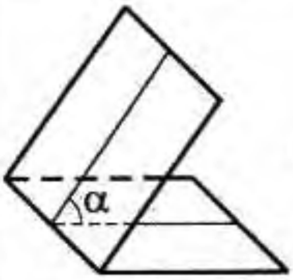


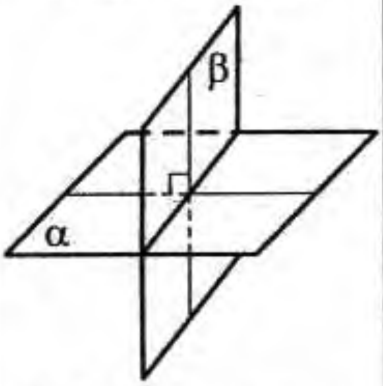
Если $a \parallel \alpha$, то расстояние между ними равно длине перпендикуляра AB

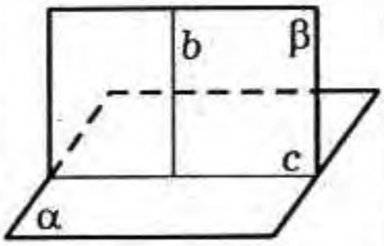


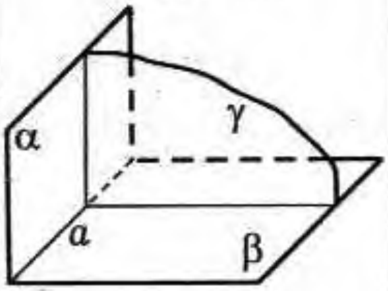
Если $\alpha \parallel \beta$, то расстояние между ними равно длине перпендикуляра AB

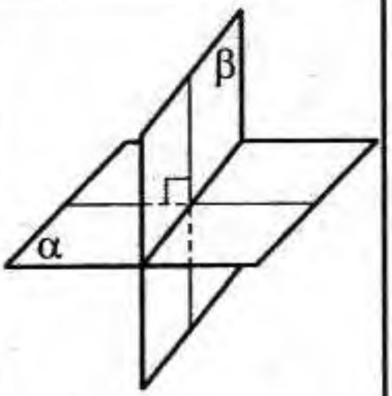
Таблица 6 – Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

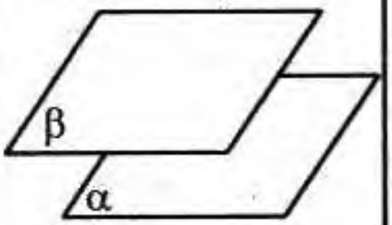
<table>
<tr><th colspan="3">Двугранный угол</th></tr>
<tr><td colspan="3">

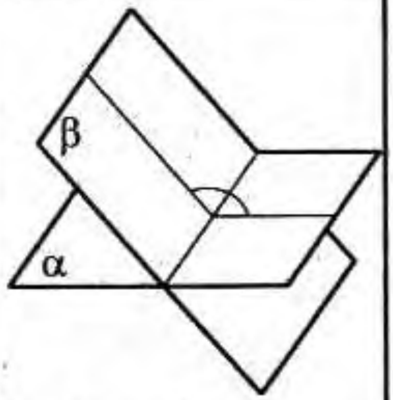
α – линейный угол двугранного угла</td></tr>
<tr><th colspan="3">Перпендикулярность плоскостей</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th>Признак</th><th>Следствие</th></tr>
<tr><td>

$\alpha \perp \beta$, если угол между ними 90°</td>
<td>

Если $b \in \beta$, $b \perp \alpha$, то $\beta \perp \alpha$</td>
<td>

Если $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Угол между плоскостями</th></tr>
<tr><td>

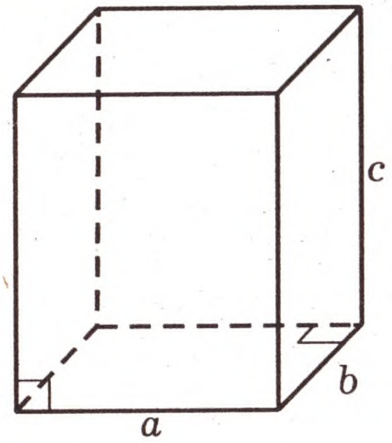
Если $\alpha \perp \beta$, то угол равен 90°</td>
<td>

Если $\alpha \parallel \beta$, то угол равен 0°</td>
<td>

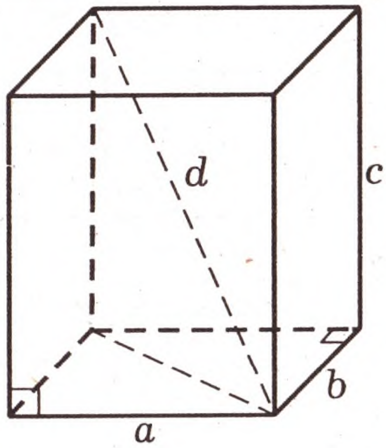
Если $\alpha \cap \beta$, то угол равен градусной мере линейного угла</td></tr>
</table>

продолжение таблицы 6

Прямоугольный параллелепипед



1. Все грани – прямоугольники.
2. Все двугранные углы – прямые.
3. a, b, c – измерения параллелепипеда.
4. Если $a = b = c$, то параллелепипед – куб



$$d^2 = a^2 = b^2 = c^2$$

Следствие:
диагонали прямоугольного параллелепипеда равны

1.3 Многогранники

Определение. Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Определение.Многогранник называется выпуклым, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Для выпуклого многогранника верна *теорема Эйлера*

$$В-Р+Г=2, \qquad (20)$$

где В — количество вершин многогранника;

Р — количество рёбер;

Г — количество граней.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника: ABC,DEF,ABED,BCFE,ACFD – грани; AB,BC,AC,DE,EF,DF,AD,BE,CF– рёбра; A,B,C,D,E,F – вершины многогранника ABCDEF (рисунок 26).

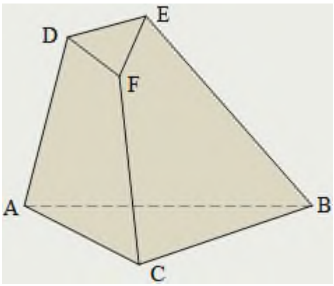


Рисунок 26 – Пример многогранника

Виды и названия многогранников. Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани правильные равные многоугольники, и все двугранные углы равны.

Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Их названия связаны с числом граней. Тетраэдр имеет 4 грани (в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдрон" – грань), гексаэдр (куб) имеет 6 граней ("гекса" – шесть); октаэдр – восьмигранник ("окто" – восемь); додекаэдр – двенадцатигранник ("додека" – двенадцать); икосаэдр имеет 20 граней ("икоси" – двадцать).

Но есть и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани - правильные, но разноименные правильные многоугольники.

Многогранники такого типа называются равноугольно-полуправильными многогранниками. Впервые многогранники такое типа открыл Архимед. Им подробно описаны 13 многогранников, которые позже в честь великого ученого были названы телами Архимеда. Это усеченный тетраэдр, усеченный оксаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный куб, усеченный додекаэдр, кубооктаэдр, икосододекаэдр, усеченный кубооктаэдр усеченный икосододекаэдр, ромбокубооктаэдр, ромбоикосододекаэдр, "плосконосый" (курносый) куб, "плосконосый" (курносый) додекаэдр.

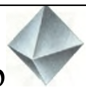
Кроме полуправильных многогранников из правильных многогранников - Платоновых тел, можно получить так называемые правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре, они называются также телами Кеплера-Пуансо. Кеплер открыл малый додекаэдр, названный им колючим или ежом, и большой додекаэдр. Пуансо открыл два других правильных звездчатых многогранника, двойственных соответственно первым двум: большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр.

Определение.Правильными многогранниками называют выпуклые многогранники, все грани и все углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники. В каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многоугольника равны. Правильные многогранники - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Рассмотрим развертку вершины многогранника. Каждая вершина может принадлежать трем и более граням.Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен 60°, три таких угла дадут в развертке 180°. Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится тетраэдр - многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани. Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится 240°. Это развертка вершины октаэдра. Добавление пятого треугольника даст угол 300° - мы получаем развертку вершины икосаэдра. Если же добавить еще один, шестой треугольник, сумма углов станет равной 360° - эта развертка, очевидно, не может соответствовать ни одному выпуклому многограннику. Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол 3х90°=270° - получается вершина куба, который также называют гексаэдром. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до 360° - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник. Три пятиугольные грани дают угол развертки 3*108°=324 - вершина додекаэдра. Если добавить еще один пятиугольник, получим больше 360° - поэтому останавливаемся.

Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки 3*120°=360°, поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует. *Эти тела еще называют телами Платона*.

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства. Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики- это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов. Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел (табл.7).

Таблица 7 – Вселенная и многогранники

Огонь	Тетраэдр 
Вода	Икосаэдр 
воздух	Октаэдр 
Земля	Гексаэдр 
вселенная	Додекаэдр 

Архимедовыми телами называются полуправильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов (рис. 27).

Тела Кеплера –Пуансо. Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре *правильных невыпуклых однородных многогранника или тела Кеплера - Пуансо*. Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис. 28).

Многогранники в природе.Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана.

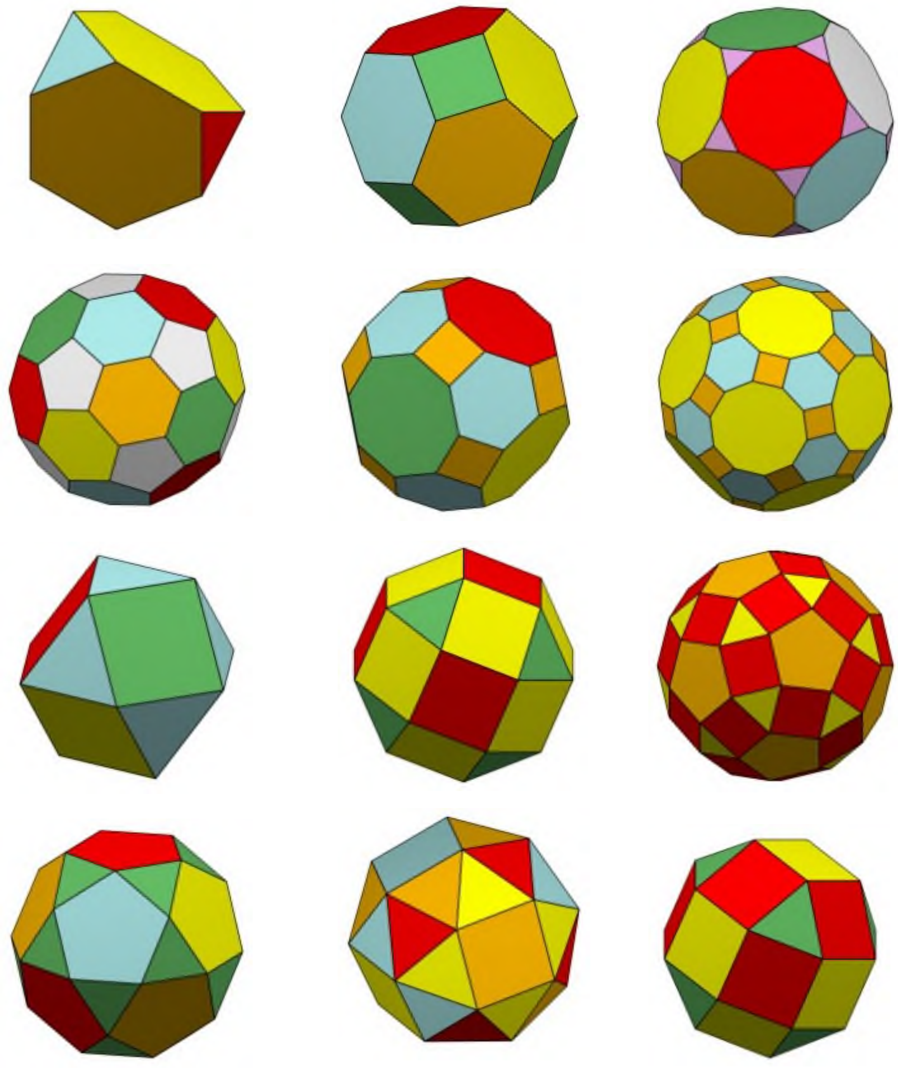


Рисунок 27 – Архимедовы тела

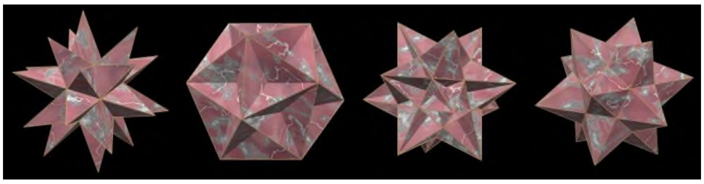


Рисунок 28 – Тела Кеплера –Пуансо

Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра. В разных химических реакциях применяется сурьменистый сернокислый натрий – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьменистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра. Последний правильный многогранник – икосаэдр передаёт форму кристаллов бора.

Скелет одноклеточного организма феодарии (Circjgjniaicosahtdra) по форме напоминает икосаэдр (рис. 29). Они живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.

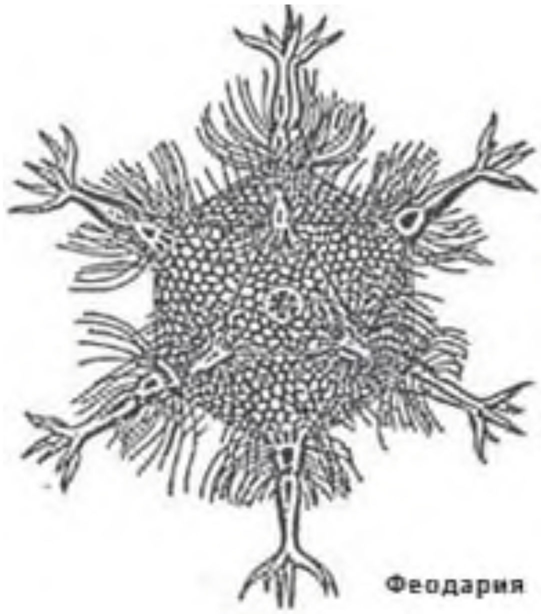


Рисунок 29 – Скелет феодарии

Определение.Призмойназывается многогранник, у которого две грани (основания) лежат в параллельных плоскостях, а все ребра вне этих граней параллельны между собой.

Обычно вершины обозначают так, что ABC... — это вершины основания, A1B1C1... — вершины второго основания, а AA1, BB1, ... — это боковые ребра.

Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.

Боковые рёбра призмы равны, параллельны и являются параллелограммами.

Призма называется n-угольной, если её основание – n-угольник.

ABCA1B1C1 – треугольная призма; ΔABC и ΔA1B1C1 – основания; AA1, BB1, CC1 – боковые рёбра; AA1B1B, AA1C1C, BB1C1C – боковые грани; A1O – высота призмы; A – угол наклона бокового ребра к основанию призмы.

Высотой призмы называется отрезок, являющийся общим перпендикуляром к плоскостям, в которых лежат основания призмы (рис. 30).

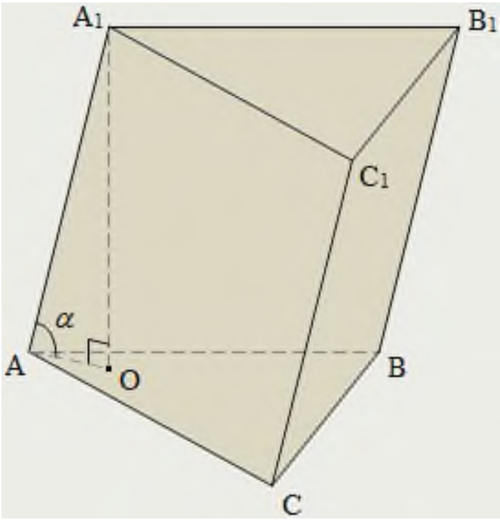


Рисунок 30 – Наклонная призма

Объем призмы можно найти по формуле:

$$V=Sh, \qquad (21)$$

где h — высота, а S — площадь основания.

Если боковое ребро образует с плоскостью угол α, то высоту можно найти по формуле:

$$h=a*\sin\alpha, \qquad (22)$$

где a — длина бокового ребра. Это следует из соотношения между гипотенузой и катетом в прямоугольном треугольнике (a — гипотенуза, h — это катет, а α — противолежащий угол).

Поверхность призмы складывается из боковых граней и двух оснований:

$$S_{\text{полной поверхности}}=S_{\text{боковой поверхности}}+2S_{\text{основания}} \qquad (23)$$

Призма, у которой боковые ребра перпендикулярны основанию, называется прямой призмой.

Площадь боковой поверхности равна:

$S_{\text{боковой поверхности}} = Ph,$ (24)

где P — периметр основания.

Частный случай прямой призмы — это правильная призма. Правильной призмой называется прямая призма, у которой основание — правильный многоугольник.У правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники. Площадь ее боковой поверхности равна

$$S_{\text{боковой поверхности}} = nha, \tag{25}$$

где a — ребро основания;
h — это высота призмы (она же боковое ребро призмы);
n — количество вершин основания.

Параллелепипед— это призма, основанием которой служит параллелограмм. Все грани параллелепипеда – параллелограммы. Объем параллелепипеда выражается с помощью той же формулы, что и объем призмы (формула 21). При этом, поскольку основание параллелепипеда — это параллелограмм, то площадь основания можно найти по формуле

$$S_{осн} = ab\sin\angle(a,b), \tag{26}$$

где a и b — стороны параллелограмма, а $\angle(a,b)$ — угол между ними.

Заметим, что в качестве основания мы можем выбрать любую грань параллелепипеда, а не только ту, на которой он "стоит". При этом при вычислении площади через h нужно обозначить длину высоты, опущенной на эту грань. Как и для призмы, высоту можно найти по формуле

$h = c\sin\alpha,$ (27)

где α — угол наклона ребра c. Важный частный случай параллелепипеда — это прямоугольный параллелепипед.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Прямоугольный параллелепипед— это параллелепипед, все грани которого — прямоугольники.

Элементы такого параллелепипеда искать особенно легко. Если a, b и c — длины сторон параллелепипеда, то Объем равен:

$V = abc,$ (28)

Площадь полной поверхности равна:

S=2(ab+bc+ac)   (29)

Диагональ равна:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (30)$$

(диагональ соединяет противоположные вершины прямоугольного параллелепипеда)

Куб — это прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны. Все ребра куба равны, все грани куба — равные квадраты. В куб можно вписать сферу, вокруг куба можно описать сферу. Все диагонали куба пересекаются в одной точке. Куб полностью определяется длиной стороны. Если а — сторона куба, то мы можем найти любой другой элемент(рис 31).

Объем куба:

$$V=a^3, \qquad (31)$$

Площадь поверхности куба:

$$S=6a^2, \qquad (32)$$

Диагональ куба:

$$d = \sqrt{3}a \qquad (33)$$

Диагональ грани:

$$d_{грани}=\sqrt{2}a\ , \qquad (34)$$

Радиус вписанной сферы:

$$r = \frac{a}{2}, \qquad (35)$$

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{\sqrt{3}a}{2} \qquad (36)$$

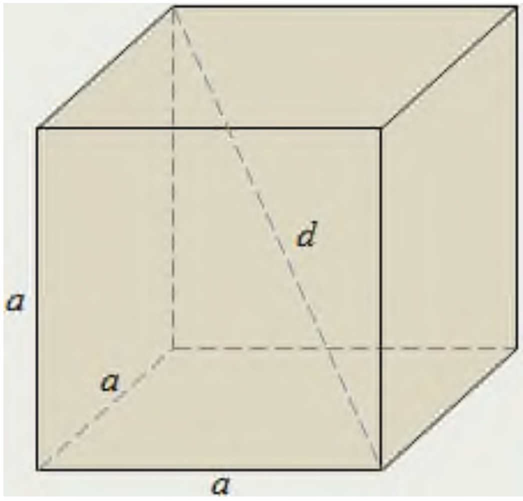


Рисунок 31 – Куб

Пирамида. Усеченная пирамида.

Определение:Многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину, называется пирамидой.

Определение:Пирамида правильная, если её основание правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центре этого многоугольника.

Определение:Высота боковой грани пирамиды называется апофемой.

Из рисунка 32:ABCDE – основание пирамиды, SO – высота пирамиды, ASB – боковая грань, AS – боковое ребро, KS = l – апофема (высота боковой грани), S – вершина пирамиды.

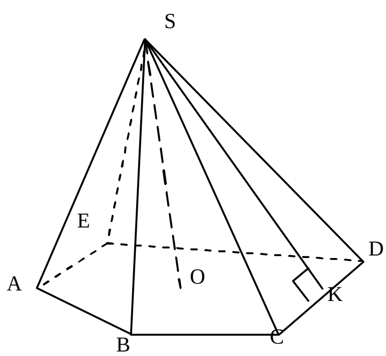
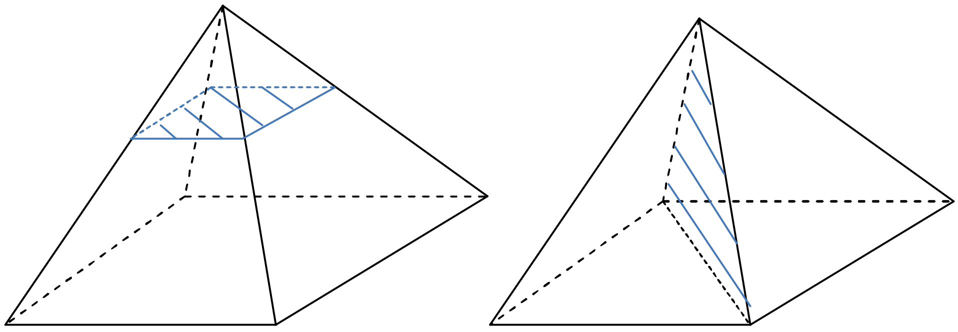


Рисунок 32 – Пирамида

Сечения пирамиды (рис.33)



α – диагональное α II основанию пирамиды

Рисунок 33 – Сечения пирамиды

<u>Определение:</u> Усеченная пирамида – многогранник, полученный в результате сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Из рисунка 34:ABCD – верхнее основание, $A_1B_1C_1D_1$ – нижнее основание, AS – высота, KF – апофема.

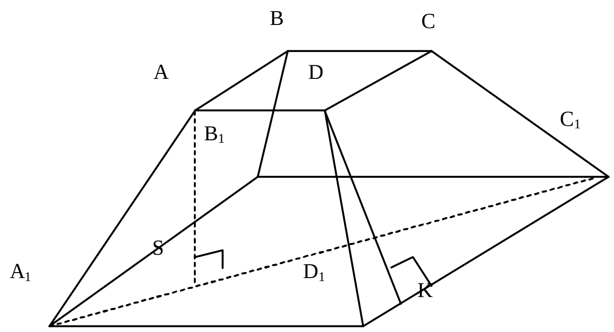


Рисунок 34– Усеченная пирамида

<u>Определение:</u>Усеченная пирамида называется правильной, если она является частью правильной пирамиды (основания – правильные многоугольники, боковые ребра равны).

Теорема: Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то площади оснований данной пирамиды и отсекаемой пирамиды относятся как квадраты их высот.

Основные формулы.

Для пирамиды:

$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{основ.}} + S_{\text{бок.пов.}}$, (37)

где $S_{\text{бок.пов.}} = \frac{p \cdot l}{2}$, *l- апофема, p – периметр основания,*

(38)

Для усеченной пирамиды:

, (39)

где ,

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_{\text{верхн.осн.}} + S_{\text{нижн.осн.}} + \sqrt{S_{\text{верх.осн.}} \cdot S_{\text{нижн.осн.}}}) \cdot h \quad (40)$$

*Пример 6.*В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 28 см, а длина бокового ребра – 36 см. Найти сторону основания.

Дано: SABCD – правильная пирамида, h = 28 см, AS = BS = CS = DS = 36 см.

Найти: 1)AB = BC = CD = AD. 2) $S_1(\text{полн. пов.})$ 3) V

Решение: 1) Рассмотрим пирамиду (рис.35). SK=28, AS=36, следовательно рассмотрим ΔASK. По т.Пифагора $AK = \sqrt{AS^2 - SK^2}$,

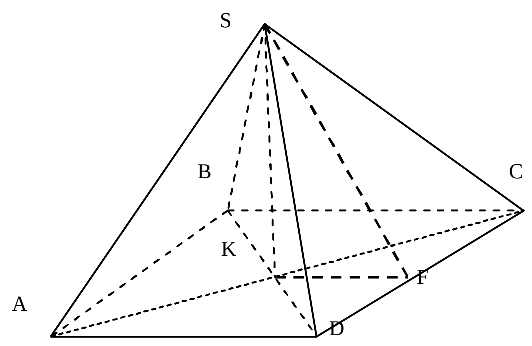


Рисунок 35– Пирамида

$AK = \sqrt{36^2 - 28^2} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}$. ΔACD: AD=DC, т.к. SABCD – правильная, $\angle D = 90°$, следовательно AC=2AK=$32\sqrt{2}$, следовательно по т.Пифагора $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD^2$, отсюда $AD = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{(32\sqrt{2})^2}{2}} = 32$

2) $S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{основ.}} + S_{\text{бок.пов.}}$, $S_{\text{основ.}} = (AD)^2 = 32^2 = 1024, S_{\text{бок.пов.}} = ?$, $P = 4AD = 4 \cdot 32 = 128.$

Из ΔSKF по т.Пифагора: $SF = \sqrt{SK^2 + KF^2} = \sqrt{28^2 + 16^2} = \sqrt{1040} = 4\sqrt{65}$, т.к. KF=AD:2. Следовательно апофема $l = 4\sqrt{65}$. $S_{\text{бок.пов.}} = \frac{128 \cdot 4\sqrt{65}}{2} = 256\sqrt{65}$, $S_{\text{полн.пов.}} = 1024 + 256\sqrt{65}$.

3) $V = \frac{1}{3} \cdot 1024 \cdot 28 = \frac{28672}{3}$

Пример 7. Дана пирамида, высота которой равна 16 м, а площадь основания 512 м^2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно основанию на расстоянии 5 м от вершины пирамиды.

Дано: Пирамида, AC = h = 16, S_o=512.α ǁ основанию, AB = 5. Найти S_α

Решение: Рассмотрим пирамиду (рис.36)

По теореме (выше по тексту) $\frac{S_\alpha}{S_o} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{S_\alpha}{512} = \frac{5^2}{16^2} \Rightarrow$

$256 \cdot S_\alpha = 512 \cdot 25 \Rightarrow S_\alpha = 50$.

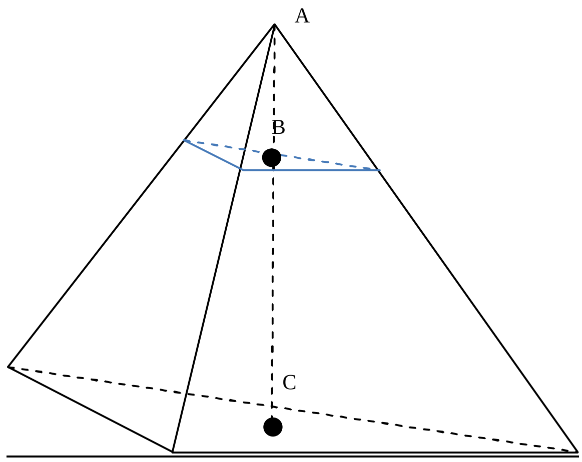


Рисунок 36– Пирамида

Сечения многогранников.Существует 2 основных метода построения сечений многогранников:1)Аксиоматический метод; а) Метод следов; б) Метод вспомогательных сечений; 2)Комбинированный метод

Рассмотрим построение сечений: аксиоматический метод

Пример 8. На ребрах AA' и B'C' призмы ABCA'B'C' зададим соответственно точку P и Q. Построим сечение призмы плоскостью (PQR), точку R которой зададим в одной из следующих граней:

а) BCCB'C'; б) A'B'C'; в) ABC.

Решение ***а)*** 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости (BCC'), то в этой плоскости лежит прямая QR. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскость(BCC') (рис.37).

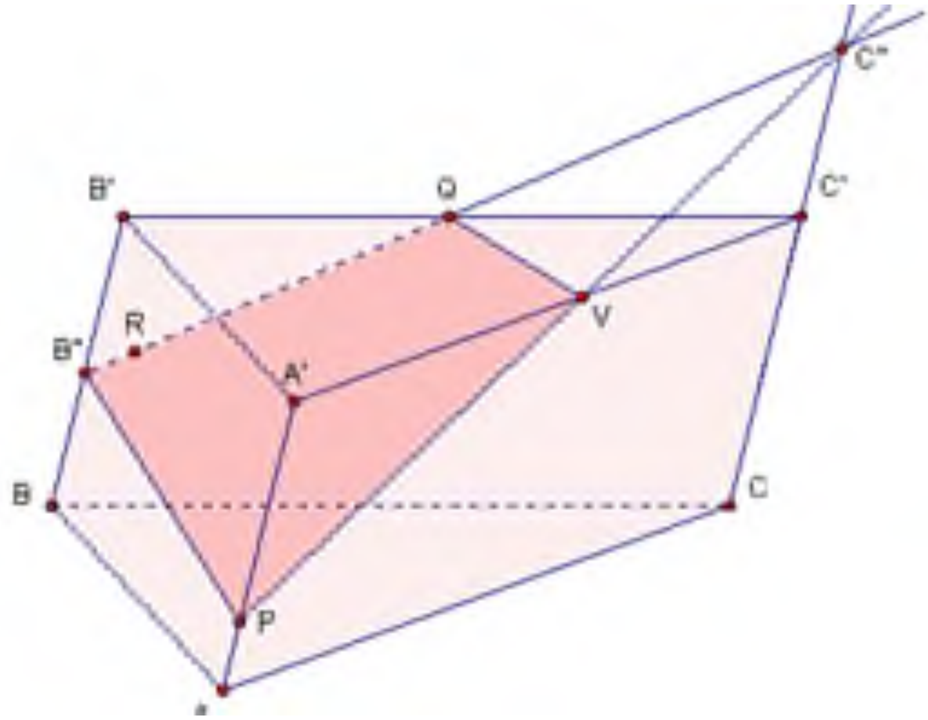


Рисунок 37– Построение сечения для решения (а)

2) Находим точки B" и C', в которых прямая QR пересекает соответственно прямые BB' и CC'. Точки B' и C' - это следы плоскости (PQR) соответственно на прямых BB' и CC'.

3) Так как точки B'' и P лежат в плоскости (ABB'), то прямая B''P лежит в этой плоскости. Проведем ее. Отрезок B''P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

4) Так как точки P и C лежат в плоскости (ACC'), то прямая PC'' лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

5) Находим точку V, в которой прямая PC'' пересекает ребро A'C'. Это след плоскости (PQR) на ребре A'C'.

6) Так как точки Q и V лежат в плоскости (A'B'C'), то прямая QV лежит в этой плоскости. Проведем прямую QV. Отрезок QV - след плоскости (PQR) на грани ABC. Итак, мы получили многоугольник QB''PV - искомое сечение.

б) 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости (A'B'C'), то в этой плоскости лежит прямая QR. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (A'B'C') (Рис.38).

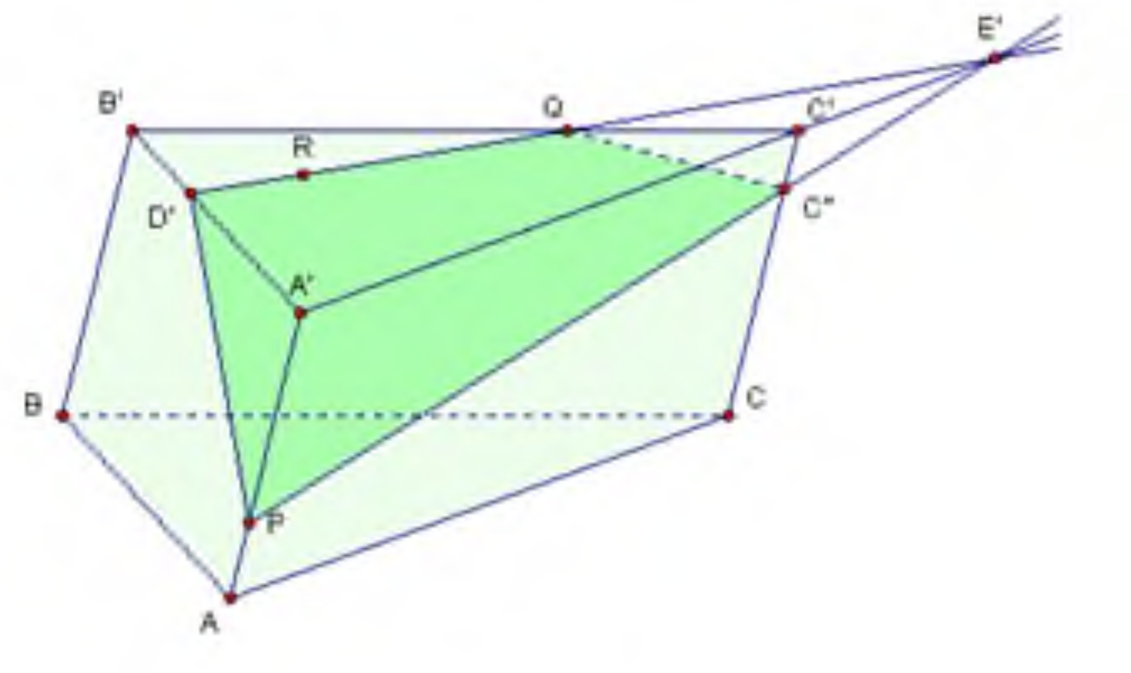


Рисунок 38– Построение сечения для решения (б)

2) Находим точки D' и E', в которых прямая QR пересекает соответственно прямые A'B' и B'C'. Так как точка D' лежит на ребре A'B', отрезок QD' - след плоскости (PQR) на грани A'B'C'.

3) Так как точки D' и P лежат в плоскости (ABB'), то прямая D'P лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ABB'), а отрезок D'P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

4) Так как точки P и E' лежат в плоскости (ACC'), то в этой плоскости лежит прямая PE'. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

5) Находим точку C''=PE''CC'. Так как точка C'' лежит на ребре CC', то отрезок PC'' - это след плоскости (PQR) на грани ACC'A'.

6) Так как точки Q и C'' лежат в плоскости (BCC'), то прямая QC'' лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC'), а отрезок QC''- след плоскости (PQR) на грани BCC'B'. Итак, мы получили многоугольник QD'PC'' - это и есть искомое сечение.

в) 1) Из трех заданных точек P, Q и R никакие две не лежат в какой-нибудь одной из плоскостей граней призмы, поэтому найдем основной след плоскости (PQR) (т. е. линию пересечения плоскости (PQR) с плоскостью (ABC), выбранной в качестве основной). Для этого сначала найдем проекции точек P, Q и R на плоскость (ABC) в направлении, параллельном боковому ребру призмы. Так как точка P лежит на ребре AA', то точка P' совпадает с точкой A. Так как точка Q лежит в плоскости (BCC'), то в этой плоскости через точку Q проведем прямую, параллельную прямой BB', и найдем точку Q', в которой проведенная прямая пересекает прямую BC. Так как точка R по условию лежит в плоскости, выбранной в качестве основной, то точка R' совпадает с точкой R (Рис.39).

2) Параллельными прямыми PP' и QQ' определяется плоскость. Проведем в этой плоскости прямые PQ и P'Q' и найдем точку S=PQ пересекает P'Q'. Так как точка S' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости (PQR), и так как точка S' лежит на прямой P'Q', то она лежит в плоскости (ABC). Таким образом,

точка S' является общей точкой плоскостей (PQR) и (ABC). Это значит, что плоскости (PQR) и (ABC) пересекаются по прямой, проходящей через точку S'.

3) Так как точка R совпадает с точкой R', то точка R - это еще одна общая точка плоскостей (PQR) и (ABC). Таким образом, прямая S'R - основной след плоскости (PQR). Проведем эту прямую. Как видим из рисунка, прямая S'R пересекает ребра AB и BC основания призмы соответственно в точках S'' и S'''.

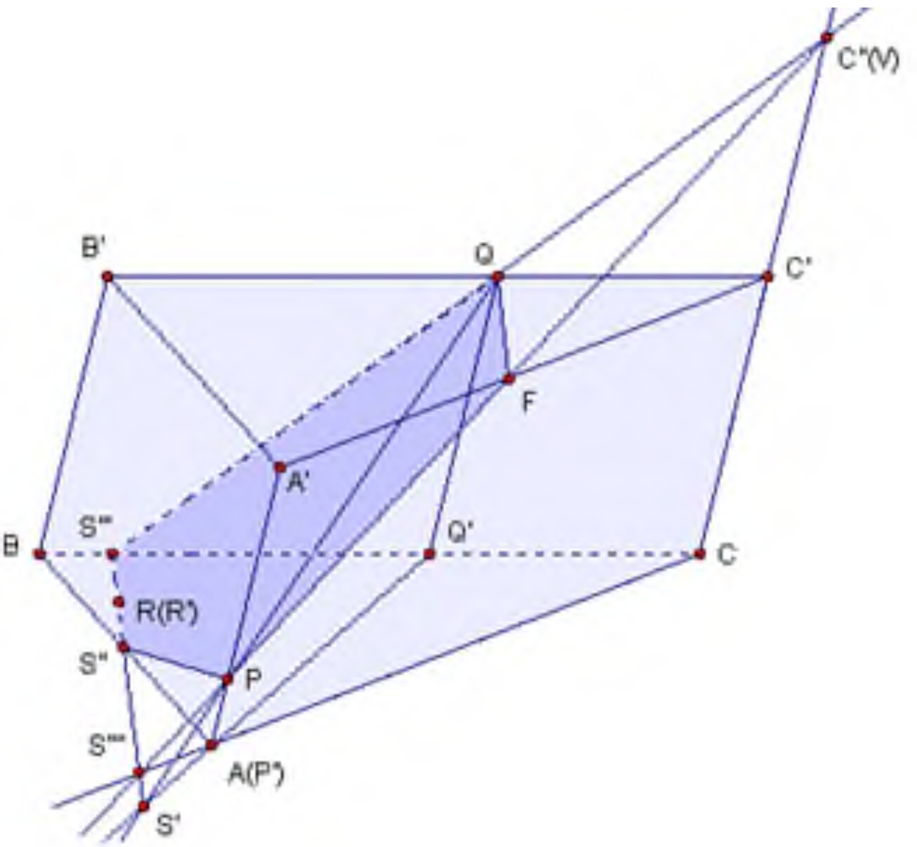


Рисунок 39– Построение сечения для решения (в)

4) Так как точки S''' и Q лежат в плоскости (BCC'), то прямая S''' Q лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC'). А отрезок S''' Q, - след плоскости (PQR) на грани BCC'B'.

5) Аналогично находим отрезок S'' P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

6) Находим далее точку C = S''' Q CC'. Так как точки C'' и P лежат в плоскости (ACC'), то прямая C''P лежит в плоскости (ACC'). Проведем эту прямую, являющуюся следом плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

7) Находим точку F=PC'' пересекает A'C' и получаем затем отрезок PF - след плоскости (PQR) на грани ACC'A'.

8) Точки Q и F лежат в плоскости A'B'C', поэтому прямая QF лежит в плоскости (A'B'C'). Проведем прямую QF, получим отрезок QF - след плоскости (PQR) на грани A'B'C'. Итак, мы получили многоугольник QS'''S''PF- искомое сечение.

*Пример 9.*На ребре MB пирамиды MABCD зададим точку P, на ее грани MCD зададим точку Q. Построим сечение пирамиды плоскостью (PQR), точку R которой зададим: а) на ребре MC; б) на грани MAD; в) в плоскости (MAC), вне пирамиды.

Решение.

а) Следом плоскости (PQR) на грани MBC является отрезок PR, а ее следом на грани MCD является отрезок RD', где точка D' - это точка пересечения прямой RQ с ребром MD. Ясно, что плоскость (PQR) имеет следы на гранях MAD и MAB (так как с этими гранями плоскость (PQR) имеет общие точки). Найдем след плоскости (PQR) на прямой MA. Сделаем это следующим образом:

1) Построим точки P', Q' и R' - проекции точек P, Q и R из центра M на плоскость (ABC), принимаемую, таким образом, за основную плоскость (Рис. 40).

2) Далее построим точки S'= PQ пересекает P'Q' и S'' = PR пересекает P'R' и проведем прямую S' S'' - основной след плоскости (PQR).

3) Если плоскость (PQR) пересекает прямую MA в некоторой точке V, то точка V' совпадает с точкой A и точка S'''= VQ пересекает V'Q' лежит на прямой S' S''. Другими словами, в точке S''' пересекаются три прямые: VQ,, V'Q'' и S' S''. Две последние прямые из этих трех на чертеже уже есть. Поэтому точку S''' мы построим как точку пересечения прямых V'Q' и SS''.

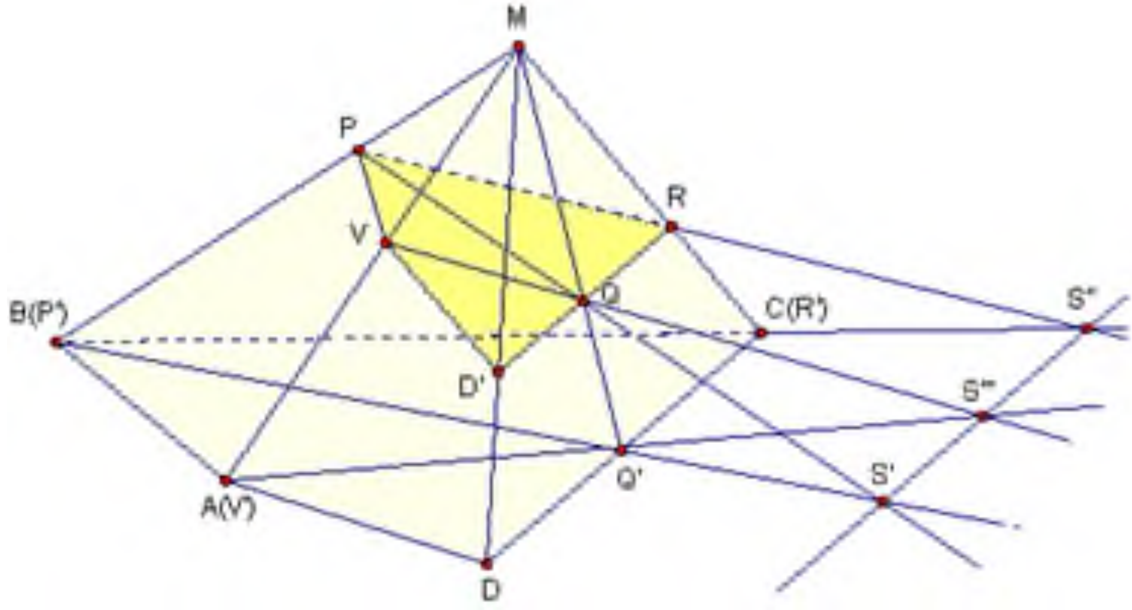


Рисунок 40– Построение сечения для решения (а)

4) Проведем прямую QS''' (она совпадает с прямой VQ, так как прямая VQ должна проходить через точку S''', т. е. точки V, Q и S''' лежат на одной прямой).

5) Находим точку V, в которой прямая QS''' пересекает прямую MA, Точка V - это след плоскости (PQR) на ребре MA. Далее ясно, что отрезки PV и VD' - следы плоскости (PQR) соответственно на гранях MAB и MAD. Таким образом, многоугольник PRD'V - искомое сечение.

б) 1) Принимаем плоскость (ABC) за основную плоскость и строим точки P', Q' и R' — проекции соответственно точек P, Q и R на плоскость (ABC). Центром этого внутреннего проектирования является точка M (Рис.41) .

2) Строим прямую S'S'' — основной след плоскости (PQR).

3) Если плоскость (PQR) пересекает прямую MA в точке V, то точка V' — проекция точки V на плоскость (ABC) из центра M— совпадает с точкой A, а прямые S'S'', V'R' и прямая VR, точка V которой пока нами не построена, пересекаются в точке S'''. Находим эту точку S'''=V'R' пересекается S'S'' .

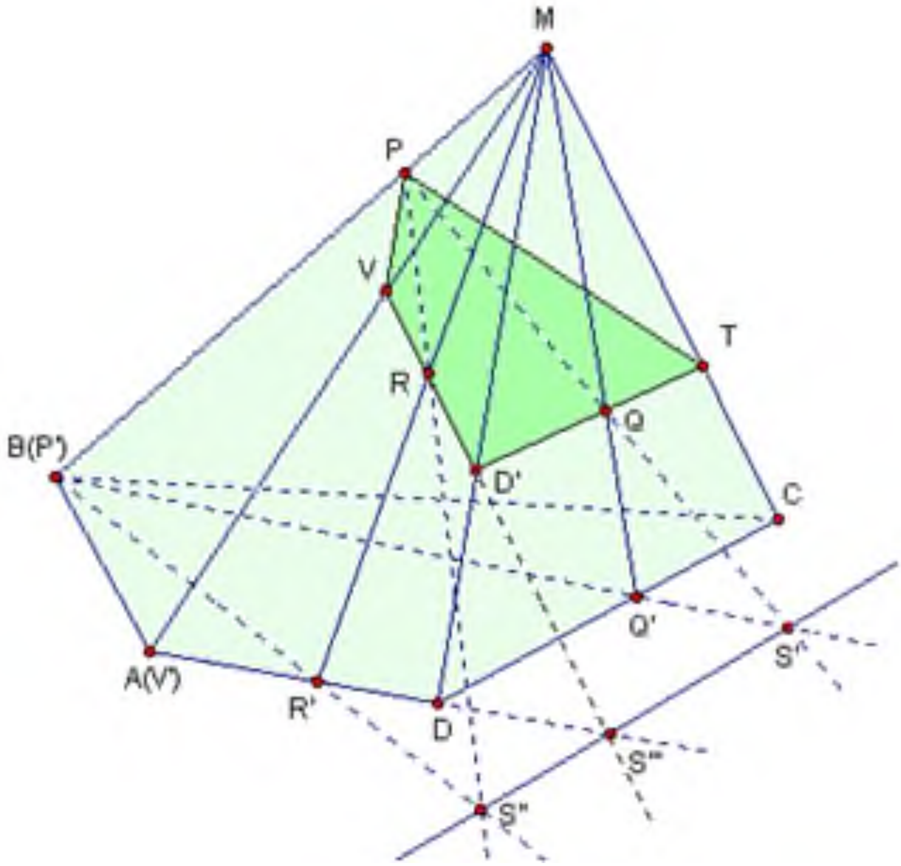


Рисунок 41– Построение сечения для решения (б)

4) Проводим прямую RS''', и находим точку V=RS''' пересекается MA. Дальнейшее построение ясно. Искомым сечением является многоугольник PVD'T.

в) Пусть точка R расположена в плоскости (MAC) так, как это показано на рисунке 42.

1) Принимаем плоскость (ABC) за основную плоскость и строим точки P', Q' и R' — проекции соответственно точек P, Q и R на плоскость (ABC). (центром проектирования является точка M.)

2) Строим прямую S'S'', — основной след плоскости (PQR).

3) Находим точку V — след плоскости (PQR) на прямой MA. Точка V' — проекция точки V на плоскость (ABC) из центра M— совпадает в этом случае с точкой A.

4) Находим точку S'''= P'V' пересекается S'S'', а затем и точку V =PS''' пересекается MA.

5) Получаем след PV плоскости (PQR) на плоскости (MAB).

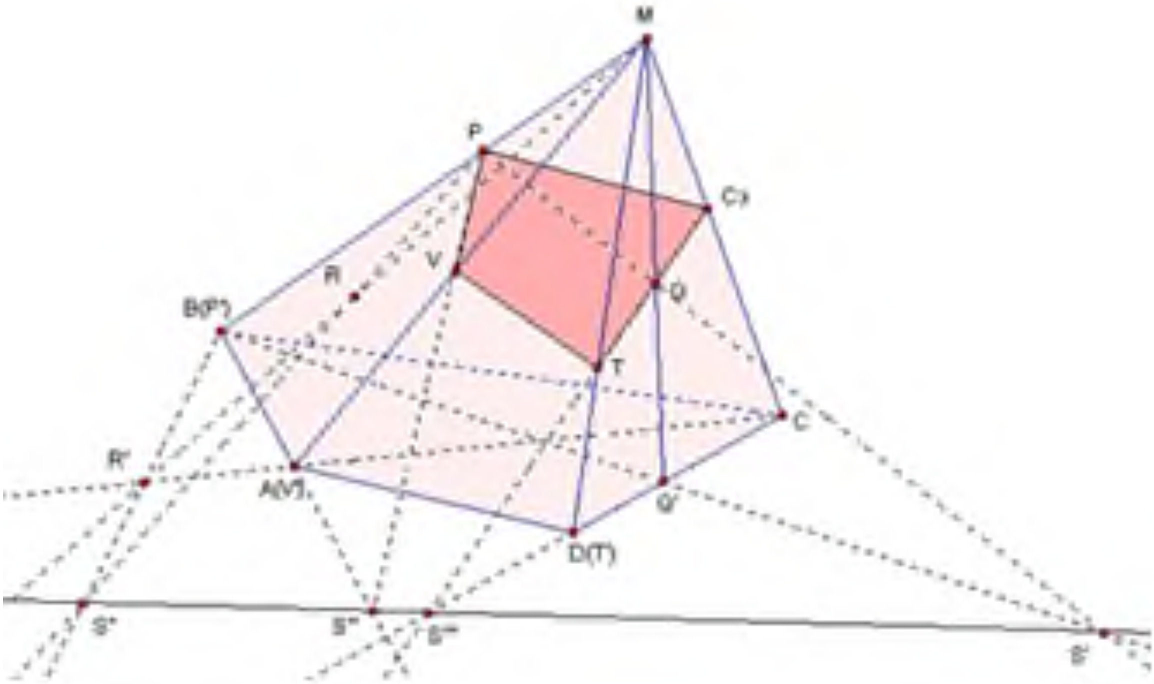


Рисунок 42– Построение сечения для решения (в)

6) Находим точку T — след плоскости (PQR) на прямой MO. Ясно, что точка T' в этом случае совпадает с точкой D. Для построения точки T строим точку S''''=Q'T' пересекается S'S'', а затем точку T=QS'''' пересекается MT'.

7) Совокупность следов PV, VT, TC', и C'P, т. е. многоугольник PVTC' — искомое сечение.

<u>Метод вспомогательных сечений.</u>Этот метод построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются „скученными". Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

<u>Построение сечений: комбинированный метод.</u>Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о

параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно двум заданным скрещивающимся прямым. Пусть требуется построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку K параллельно двум заданным скрещивающимся прямым l и m. При решении задач этого вида можно применять следующий план построения:

1) Выберем некоторую точку W. (Эта точка может лежать на одной из заданных скрещивающихся прямых, может совпадать с точкой K.)

2) Через точку W проведем прямые l' и m'. (Естественно, если точка W лежит на одной из прямых, например на прямой l, то прямая l' совпадает с прямой l.)

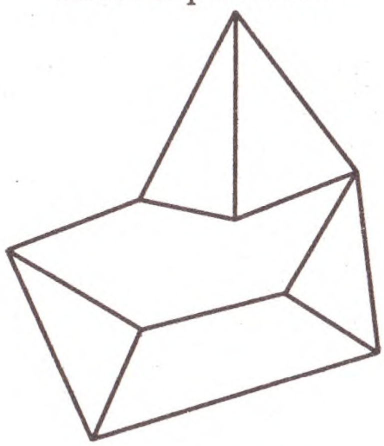
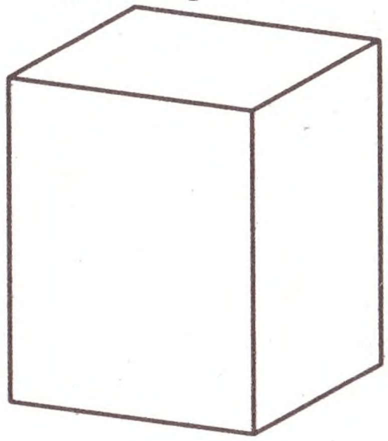
3) Пересекающимися прямыми l' и m' определяется плоскость бетта - плоскость вспомогательного сечения многогранника. Строим сечение многогранника плоскостью бетта.

4) Построим сечения многогранника плоскостью альфа, проходящей через точку K, параллельно плоскости бетта.

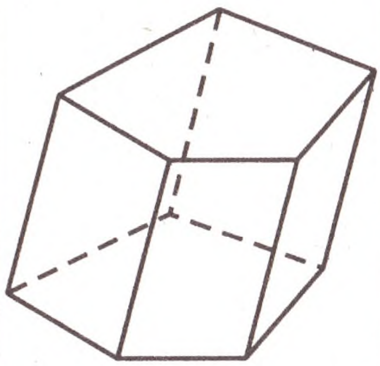
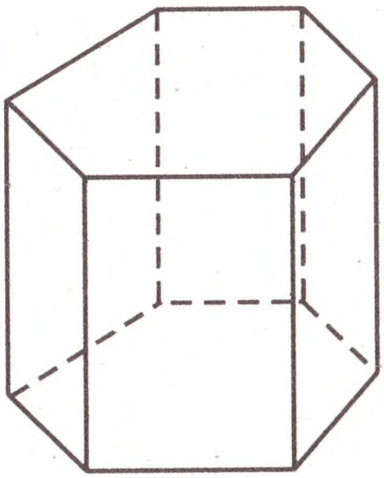
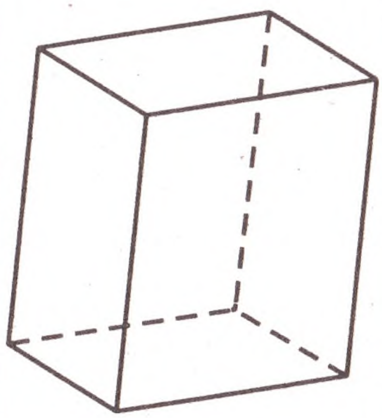
Задание для студентов. Сделать конспект по плану, представленному в таблице 8.

Таблица 8 – Многогранники. Площади поверхностей. Объемы

Многогранники

Невыпуклый многогранник	Выпуклый многогранник
	

Призма

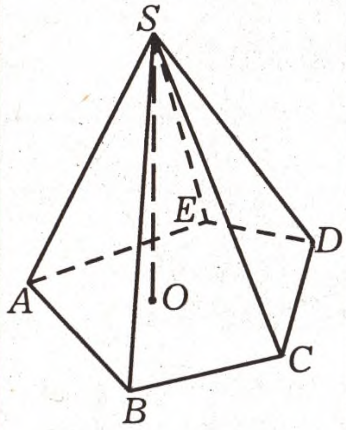
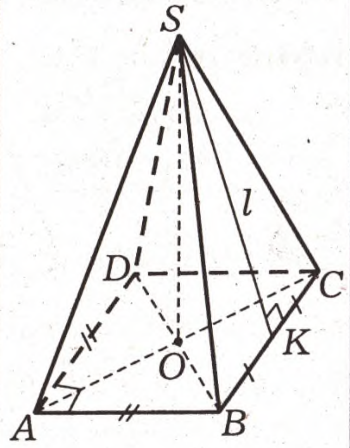
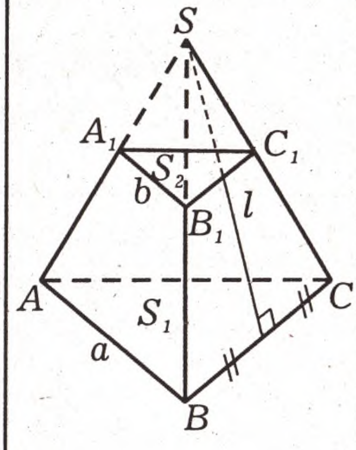
Наклонная пятиугольная	Прямая шестиугольная	Параллелепипед
		

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot H \text{ (для прямой призмы)}$$

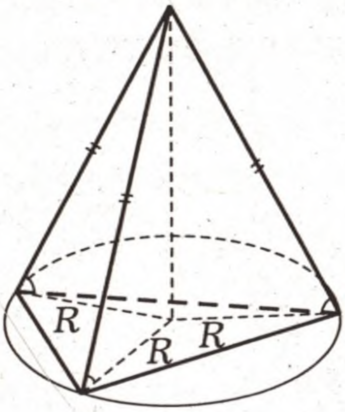
$$S_{пов} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$V = S_{осн} \cdot H$$

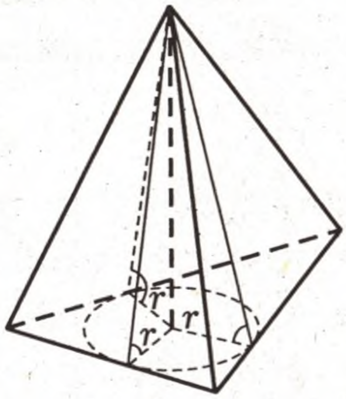
продолжение таблицы 8

Пирамида		
		
$SABCDE$ – пирамида S – вершина пирамиды $ABCDE$ – основание пирамиды $SO = H$ – высота $S_{пов} = S_{бок} + S_{осн}$ $V = \frac{1}{3} S \cdot H$	$SABCD$ – правильная пирамида SO – высота, ось $SK = l$ – апофема $S_{бок\,пр.пир.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, где l – апофема	$SABC \sim SA_1B_1C_1$ $ABCA_1B_1C_1$ – усеченная пирамида $S_{бок\,пр.ус.пир.} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot n \cdot l$, где: l – апофема, n – число сторон многоугольника $S_{пов} = S_{бок} + S_1 + S_2$ $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$

продолжение таблицы 8



Если у пирамиды боковые ребра равны или углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны, то ее вершина проецируется в ....



Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то ее вершина проецируется в ... .

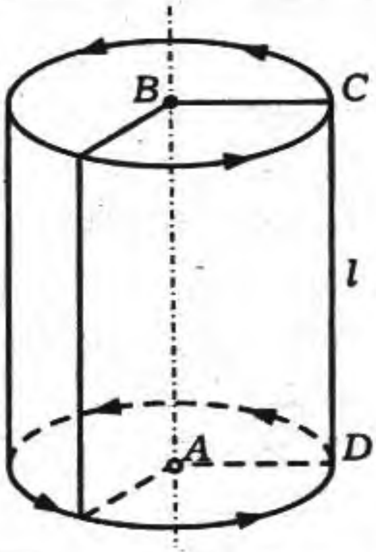
Правильные многогранники

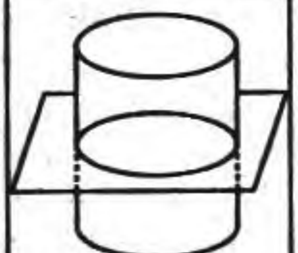
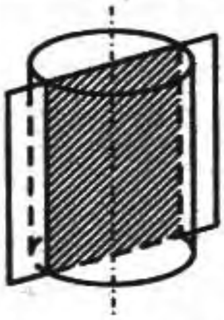
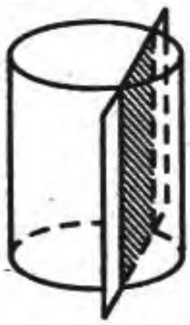
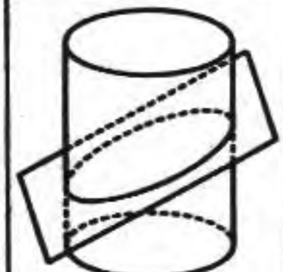
Тетраэдр Куб Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

Правильный многогранник	Боковая грань	Количество граней	Количество ребер, сходящихся в одну вершину
Правильный тетраэдр	△	4	3
Куб (гексаэдр)	□	6	3
Октаэдр	△	8	4
Додекаэдр	⬠	12	3
Икосаэдр	△	20	5

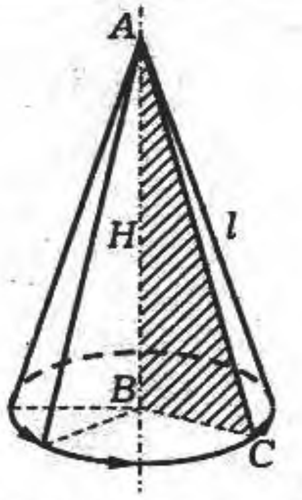
1.4 Тела вращения

Задание для студентов. Сделать конспект по плану, представленному в таблице 9.

Цилиндр	
 **Цилиндр получен вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB.**	**AB – ось, AD – радиус, DC – образующая. $S_{бок} = CH = 2\pi RH$, где: C – длина окружности, H – высота, R – радиус. $S_{осн} = \pi R^2$, $S_{пов} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $S_{пов} = 2\pi RH + 2\pi R^2$, $V = \pi R^2 H$**

Сечения цилиндра			
 **Сечение, параллельное основанию (круг)**	 **Осевое сечение (прямоугольник)**	 **Сечение, параллельное оси (прямоугольник)**	 **Сечение, пересекающее все образующие (эллипс)**

Конус



Конус получен вращением прямоугольного ΔABC вокруг катета AB

AB – ось, высота. AC – образующая. BC – радиус.

$$S_{бок} = 0,5Cl,\ C = 2\pi R,$$

где: C – длина окружности, l – образующая, R – радиус.

$$S_{бок} = \pi R l$$

$$S_{осн} = \pi R^2,$$

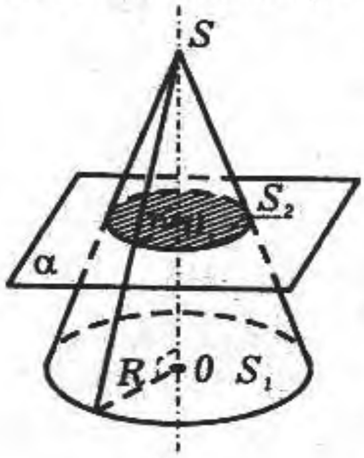
$$S_{пов} = S_{бок} + S_{осн},$$

$$S_{пов} = \pi R l + \pi R^2,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Сечения конуса

Усеченный конус



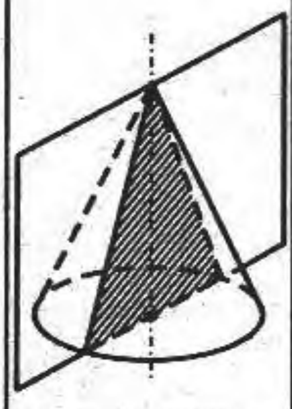
$$S_{бок.\ ус.\ к.} = \pi(R+r)l,$$

где: l – образующая.

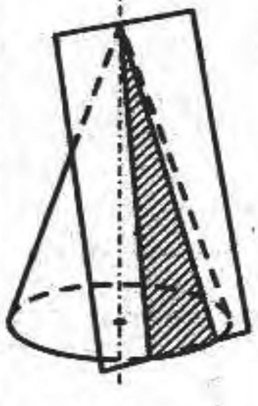
$$S_{пов.\ ус.\ к.} = S_{бок} + S_1 + S_2$$

$$V_{ус.\ к.} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$$

Сечение конуса плоскостью d, перпендикулярной к его оси, – круг с центром O_1 радиуса r.



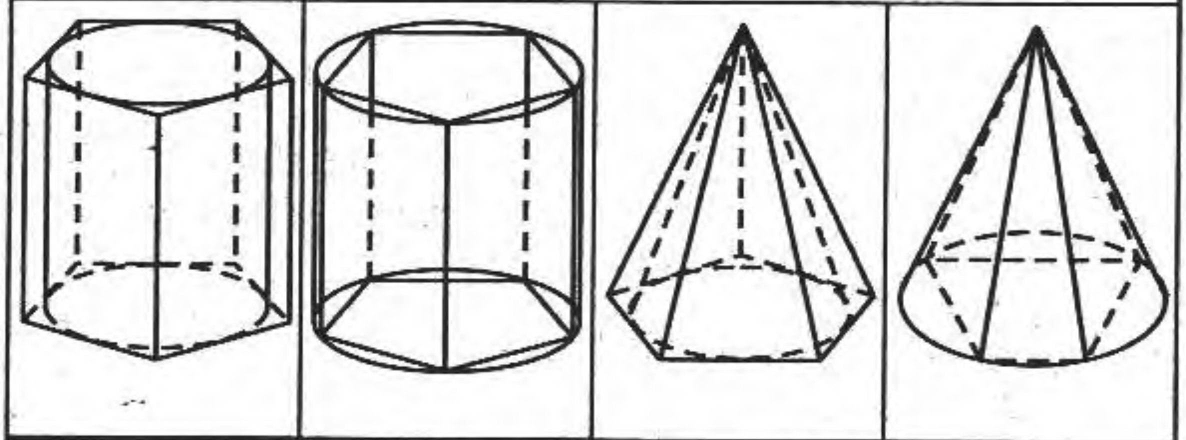
Осевое сечение конуса (равнобедренный треугольник)



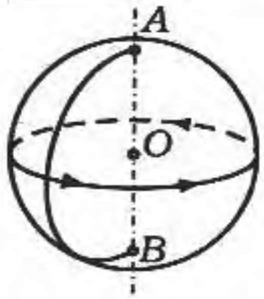
Сечение плоскостью, проходящей через вершину и основание конуса (равнобедренный треугольник)

продолжение таблицы 9

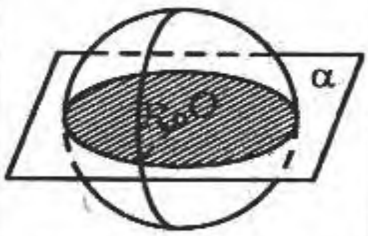
Вписанные и описанные многогранники



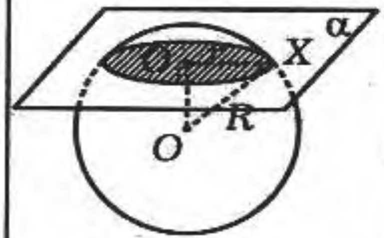
Шар. Сечения шара. Сфера



Шар получен вращением полукруга вокруг диаметра AB; OA – радиус.



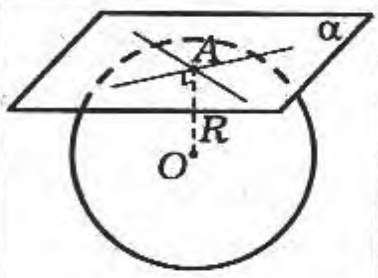
Диаметральная плоскость сечения (круг)



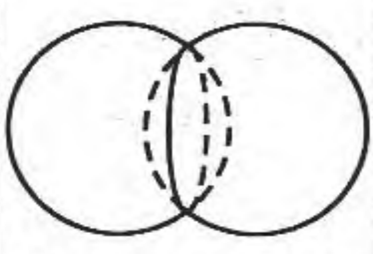
Сечение шара плоскостью α (круг).

$OO_1 \perp \alpha$;

$r_{сеч} = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$



α – касательная плоскость; A – точка касания; $R \perp \alpha$



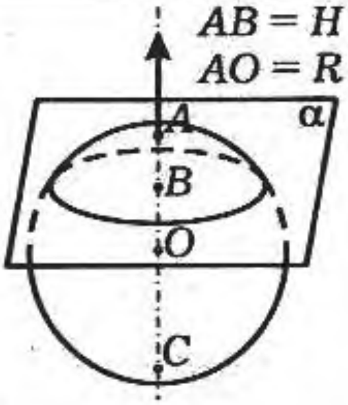
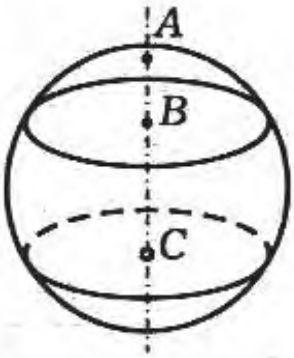
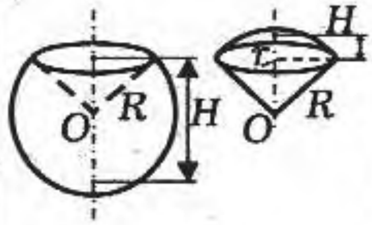
Пересечение двух сфер – окружность

$S_{пов.\ шара} =$

$= S_{пов.\ сферы} = 4\pi R^2$

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$

продолжение таблицы 9

Части шара		
		
Шаровой сегмент	Шаровой слой	Шаровой сектор
$V_{шар.сегм.} =$ $= \pi H^2 (R - \frac{1}{3}H)$	Объем шарового слоя равен разности объемов шаровых сегментов, высоты которых равны АС и АВ	$V_{шар.сект.} = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Раздел 2. Практические задания для закрепления

2.1 Координаты и векторы в пространстве. Прямая и плоскость в пространстве

Работа № 1

Вариант 1

1. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (к; 2; 2) и $\vec{b}$ = (3; -к; -3) перпендикулярны? Найти $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ = (2; 5; -2) и $\vec{b}$ = (-3; 0; 1).

3. Найти длину вектора $\left|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = -\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ и $\vec{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$.

4. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (9;- к; 3) и $\vec{b}$ = (к; -1; 1) коллинеарны? Найти $\frac{1}{3}\vec{a} + 4\vec{b}$.

Вариант 2

1. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (-2; к; 4) и $\vec{b}$ = (3; -3; к) перпендикулярны? Найти $-2\vec{a} - \vec{b}$.

2. Найти длину вектора $\left|2\vec{a} + \vec{b}\right|$, если $\vec{a} = 3\bar{i} - 2\bar{k}$ и $\vec{b} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

3. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (к; 4; -2) и $\vec{b}$ = ($-\frac{1}{2}$; - 2; к) коллинеарны? Найти $\vec{a} - 2\vec{b}$.

4. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ = (1; 2; 5) и $\vec{b}$ = (-2; 3; 1)

Вариант 3

1. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (к; 2; 3) и $\vec{b}$ = (12; 4; к) коллинеарны? Найти $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. При каком значении $к$ векторы $\vec{a}$ = (3; к; -5) и $\vec{b}$ = (4; -1; к) перпендикулярны? Найти $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ = (3; -1; -1) и $\vec{b}$ = (2; -1; 3).

4. Найти длину вектора $\left|-\vec{a} - 2\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\vec{b} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

Работа № 2

1) Найти $S_{\Delta ABC}$, если A(0;2;6), B(4;0;0), C(8;-2;0)

2) Сила $F = 2i - 3j + 4k$ приложена к точке M(1;5;-2). Найдите величину момента силы F относительно начала координат.

3) Установите компланарны ли $\bar{a} = (-2; -1; -3), \bar{b} = (-1; 4; 6), \bar{c} = (1; 5; 9)$.

4) Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\bar{a} = (1; 2; 3), \bar{b} = (-1; 3; 4), \bar{c} = (2; 5; 2)$.

5) Определите лежат ли в одной плоскости следующие четыре точки: $A = (5; 2; -2)$, $B = (6; -3; 1)$, $C = (0; 4; -3)$, $D = (2; 0; -4)$.

6) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты точек $A_1B_1D_1D$, если $A = (5; -5; 0)$, $B = (0; -5; 0)$, $C = (0; 0; 0), C_1 = (0; 0; -5)$.

Работа № 3

Вариант1

1) Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты: $A(3; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $B_1(0; 0; -3)$. найдите координаты вершин: $D. C_1, A_1$ и D_1

2) Даны векторы: $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}$ и координаты вектора $\vec{c}$, если: $\vec{c} = 2\vec{a}$-3$\vec{b}$

3) Найдите значение m и n, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a} = (1; -2; m)$, $\vec{b} = (n; 6; 3)$. Найдите косинус угла между вершинами:

4) Выясните, перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = (3; -2; 1)$,

$\vec{b} = (4; -7; -3)\vec{a} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right)$, $\vec{b} = \left(2; -\frac{4}{3}; 0\right)$

5) Даны точки: $A(-1; 2; 1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 0)$, $D(2; 1; 2)$. Найдите косинус угла между вершинами:$\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

6) Составьте уравнение сферы Сфера проходит через точку А (3;2;1), а её центр находится в начале координат.

7) Вычислите углы, образуемые прямой $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{1}$ с координатными осями

8) Даны точки: А (2;1;-3) и В (3;3;-2). Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М (7;3;-1) и перпендикулярной вектору $\overline{\text{АВ}}$

Вариант 2

1) Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты:$A(0; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 2)$. найдите координаты вершин:B_1, C_1, D_1 и C

2) Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = (2; 6; -4)$ Найдите длину вектора $\vec{a}$ и координаты вектора $\vec{c}$, если: $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$

3) Найдите значение m и n, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если:$\vec{a} = (2; m; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; n)$

4) Выясните, перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = (4; 5; -1)$,

$\vec{b} = (2; -1; 3)\vec{a} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}; \frac{6}{5}; \frac{4}{3}\right)$

5) Даны точки: $E(1;-2;2)$, $F(3;0;2)$, $K(0;-2;3)$, $T(2;4;1)$. Найдите косинус угла между вершинами: $\overline{EF}$ и $\overline{KT}$

6) Составьте уравнение сферы Сфера проходит через начало координат, а её центр находится в точке S (-2;2;5)

7) Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (1;-2;3) и параллельно прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$

8) Найти угол между плоскостями 2x-3y+z-5=0 и 3x-y-z+2=0

Вариант 3

1) Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты:

$A(0;-4;0)$, $B(0;0;0)$, $C(-4;0;0)$, $B_1(0;0;-4)$ найдите координаты вершин: D, C_1, A_1 и D_1

2) При каких α векторы взаимно перпендикулярны:а)

$\bar{a}=(\alpha;-3;2), \bar{b}=(1;2;-\alpha)$б) $\bar{a}=\alpha i+3j+4k, \bar{b}=4i+\alpha j-7k$

3) Дан треугольник ABC. Вычислите угол между медианой $\overline{BD}$ и стороной AC, если A(3;-2;1), B(3;0;2), C(1;2;5)

4) Сила $\bar{F}=3j+k$ приложена к точке A(2;1;4). Найдите значение величины момента этой силы относительно точки O (2;-1;3).

5) Определите лежат ли в одной плоскости следующие точки: $M_1(3;5;1)$, $M_2(2;4;7)$, $M_3(1;5;3)$, $M_4(4;4;5)$.

6) Дан треугольник с вершинами в точках A(1;-2;-4), B(1;6;-8), C(-7;11;6). Отрезок CM – медиана треугольника. Напишите каноническое уравнение прямой CM.

7) При каких значениях α и β параллельны плоскости: и .

8) При какихk перпендикулярны плоскости: и .

9) Докажите, что дано уравнение сферы: $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-43=0$. Выпишите координаты центра сферы и её радиус.

10) Шар, радиус которого 41дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найти площадь сечения и длину его окружности.
($S = \pi R^2, l = 2\pi R$ – формулы для круга и окружности).

Работа № 4

Даны точки $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$ в трехмерном пространстве. Найти:

1. Координаты, длину векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$;
2. Координаты точки К, если К – середина $\overline{A_1A_3}$;
3. Угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;
4. Скалярное произведение векторов $\overline{\overline{A_1A_2}}$ и $\overline{A_1A_3}$;
5. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$;
6. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.
7. Сделайте чертеж.

Вариант № 1	$A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$.
Вариант № 2	$A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;4)$
Вариант № 3	$A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$
Вариант № 4	$A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$
Вариант № 5	$A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)$
Вариант № 6	$A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$
Вариант № 7	$A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$
Вариант № 8	$A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7)$

Вариант № 9	$A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7)$
Вариант № 10	$A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1)$
Вариант № 11	$A_1(-4;2;9), A_2(1;7;3), A_3(-1;-2;7), A_4(3;-5;1).$
Вариант № 12	$A_1 1\ (2;2;8), A_{\downarrow}2\ (6;5;-9), A_1 3\ 1;7;3), A_1 4\ (0;-2;4)$
Вариант № 13	$A_1(3;5;-5), A_2(8;-1;3), A_3(0;-1;11), A_4(-5;4;-2)$
Вариант № 14	$A_1(10;4;0), A_2(-2;6;4), A_3(-2;-3;-4), A_4(4;2;1)$
Вариант № 15	$A_1(9;0;6), A_2(3;-1;2), A_3(0;-1;9), A_4(8;5;-2)$

Работа № 5

1) Дан куб. Назовите:

а) вектор с началом в точке B_1, равный вектору $\overline{Д_1Д}$

б) вектор с концом в точке С, коллинеарный вектору $\overline{Д_1А_1}$ и противоположно направленный с ним

в)найти $|\overline{BC_1}|$, если $|\overline{B_1B}| = 4\sqrt{2}$

2) Дан правильный тетраэдр M,N,K – середины ребер AB,BC и СД соответственно. Назовите:

а) вектор с началом в точке Д, равный вектору $\overline{Кс}$

б) вектор с концом в точке N, коллинеарный вектору $\overline{СА}$ и противоположно направленный с ним

в) найти $|\overline{Ак}|$, если $|\overline{MN}| = 4\sqrt{3}$

3) ДАВС – треугольная пирамида, К и М середины $\overline{Ав}$ и $\overline{Вс}$ соответственно. Назовите вектор равный: а) $2\overline{Мс}$ б) $\overline{Ас}+\overline{Сд}$, в) $\overline{Вм}-\overline{Ам}$, г) ½ $\overline{ВА}+\overline{Кс}+\overline{Сд}$

Работа № 6. Параллельное проектирование

Вариант 1

1. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса

$x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A(3;2;1) переходит в точку A_1(-2;4;6).

2. При параллельном переносе точка A(4;5;-2) переходит в точку A_1(2;-3;4). В какую точку переходит точка M (-1;1;3)?

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C переходит в точку D, если:

а) A(3;2;-1), B(2;-3;3), C(4;1;-2), D(3;-4;2);

б) A(-2;-2;3), B(4;-3;1), C(0;5;-2), D(7;6;5);

4. Отрезок AB разделен точками C, D, E на четыре равные части. Известны координаты точек C(2;-3;4) и E(3;0;-1). Найдите координаты остальных точек A, B, D.

5. Найдите координаты точек симметричных точкам A(3;-5;2) и B(-2;-1;4) относительно: а) плоскости XOY; б) плоскости XOZ; в) плоскости YOZ; г)оси OX; д) оси OY; е) начала координат.

6. Концы отрезка AB имеют координаты A(3;2;-1) и B(-2;3;2). Найдите координаты точки, симметричной середине AB относительно плоскости XOZ.

7. Параллельный перенос в пространстве задан формулами:

$x' = x + 3, y' = y + 5, z' = z - 4$

а) в какую точку при таком переносе переходит точка A(-7;-2;3);

б) какая точка при таком переносе переходит в точку B_1(2;-5;3)?

Вариант 2

1. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса

$x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A(7;-2;-1) переходит в точку A_1(-3;-1;2).

2. При параллельном переносе точка A(3;3;-4) переходит в точку A_1(2;-1;0). В какую точку переходит точка M (-1;-2;-4)?

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C переходит в точку D, если:

а) A(1;1;3), B(3;2;-4), C(5;2;-1), D(3;0;-1);

б) A(-1;-2;1), B(0;4;1), C(3;-5;2), D(4;1;2);

4. Отрезок AB разделен точками C, D, E, F, K на шесть равных частей. Известны координаты точек A(3;2;-1) и K(10;-1;4). Найдите координаты остальных точек B, C, D, E, F.

5. Найдите координаты точек симметричных точкам A(3;2;-2) и

B(-1;2;4) относительно: а) плоскости XOZ; б) плоскости XOY; в) плоскости YOZ; г)оси OZ; д) оси OX; е) начала координат.

6. Концы отрезка AB имеют координаты A(7;5;-2) и B(3;4;-6). Найдите координаты точки, симметричной середине AB относительно плоскости YOZ.

7. Параллельный перенос в пространстве задан формулами:

$x' = x - 10, y' = y + 2, z' = z - 7$

а) в какую точку при таком переносе переходит точка A(3;-5;1);

б) какая точка при таком переносе переходит в точку B_1(-1;3;2,5)?

Вариант 3

1. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A(1; 0; 2) переходит в точку A_1(2; 1; 0).

2. При параллельном переносе точка A(2; 1; -1) переходит в точку A_1(1; -1; 0). В какую точку переходит начало координат?

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C переходит в точку D, если:

а) A(2, 1, 0), B(1, 0, 1), C(3, -2, 1), D(2, -3, 0);

б) A(-2, 3, 5), B(1, 2, 4), C(4, -3, 6), D(7, -2, 5);

в) A(0, 1, 2), B(-1, 0, 1), C(3, -2, 2), D(2, -3, 1);

г) A(1, 1, 0), B(0, 0, 0), C(-2, 2, 1), D(1, 1, 1).

4. Отрезок AB разделен точками C, D, E и H на пять равных частей. Известны координаты точек C(3, -5, 7) и H(-2, 4, -8). Найдите координаты остальных точек A, B, D, E.

5. Проверьте, что точки A(3, -1, 2), B(1, 2, -1), C(-1, 1, -3), D(3, -5, 3) служат вершинами трапеции. Найдите длины её параллельных сторон.

6. Найдите координаты точек симметричных точкам A(7, -3, 1) и B(2, 4, -5) относительно: а) плоскости XOY; б) плоскости XOZ; в) оси OX; г) оси OY; д) начала координат.

7. Концы отрезка AB имеют координаты A(2, 3, 1) и B(4, -5, 6).найдите координаты точки, симметричной середине AB относительно плоскости XOY.

8. Параллельный перенос в пространстве задан формулами: $x' = x + 2, y' = y - 1, z' = z - 3$

а) в какую точку при таком переносе переходит точка A(1, 0, -2);

б) какая точка при таком переносе переходит в точку B_1(3, 4, -5)?

9. Даны точки A(-4, 3, 1) и B(2, -1, 5). Запишите координаты точек, симметричных точке C – середине AB относительно: а) точки K(-2, 1, -3); б) середине отрезка AC.

2.2 Многогранники

Для решения задач используйте формулы из таблиц 10.

Работа № 1

1.У вас 2 списка: термины и определения. Установите между терминами и их определениями соответствие.

Термины:

1. Октаэдр
2. Площадь боковой поверхности прямой призмы
3. Площадь полной поверхности призмы
4. Параллелепипед
5. Диагональ многогранника
6. Многогранник
7. Правильный многогранник

8. Выпуклый многогранник

Определения:

1. пространственное тело, ограниченное многоугольниками.
2. пространственное тело, ограниченное тремя парами попарно параллельных плоскостей
3. многогранник, который расположен по одну сторону от плоскости, содержащей любую его грань
4. многогранник, в основании которого лежит правильный многоугольник
5. произведение периметра основания на высоту призмы
6. многогранник с восемью гранями
7. сумма площадей всех граней призмы
8. отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани

2. Решите задачу: Дан прямоугольный параллелепипед. Стороны оснований равны 4 м и 300 см. Высота параллелепипеда равна 3 м. Найдите объем, площадь полной поверхности и площадь диагонального сечения параллелепипеда. Изобразите параллелепипед и его развертку в масштабе 1 см тетради – 100 см реальной фигуры.

3. Выполните следующие задания:

Требуется вычислить объем, площадь полной поверхности и площадь диагонального сечения аудитории, принимая её форму за прямоугольный параллелепипед. Так же необходимо изобразить полученный параллелепипед и его развертку в масштабе.

Для измерений используется нитка и линейка. Масштаб изображения группа выбирает сама(так чтобы рисунок был разборчив и понятен).

Работа № 2

1) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7, а сторона основания 8. Найдите боковое ребро.

2) Найдите объем пирамиды с высотой h, если h=2м, а основанием служит квадрат со стороной 3м.

3) Найдите площадь полной поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

4) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

5) Основанием пирамиды DABC является треугольник ABC, у которого AB=AC=13 см, BC=10 см. Ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

*6) Найдите объем пирамиды с высотой h, если h=2,2 м, а основанием служит треугольник ABC, в котором AB=20 см, BC=13,5 см, $\angle ABC = 30^\circ$.

*7) Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите высоту пирамиды и площадь боковой поверхности пирамиды.

Работа № 3.

1. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.

2. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.

3. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45^0. Сторона основания*l*. Найти боковую поверхность призмы.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.

5. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

6. Стороны основания правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. ***1)*** Найдите высоту пирамиды. ***2)*** Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Методические указания к задачам

1.ABCD – квадрат, h = AA_1 – высота, $S_п = S_б + 2S_о$.Отсюда находим $S_о$,

$S_б = P_o \cdot h = P_o \cdot AA_1$. Выражаем чему равно **$AA_1$**. $S_о = S_{квадрата} = (AB)^2$. Отсюда находим AB и $P_о$, $P_о$ – периметр, он равенсумме сторон многоугольника. Осталось вычислитьчему же равно AA_1= h =? (рис.43)

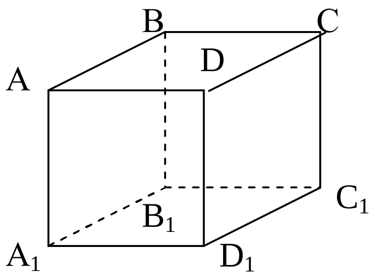


Рисунок 43 – Чертеж к задаче 1

2. $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = h$, $S_б = P_o \cdot h$,

$P_o = AB + BC + AC$, (рис. 44).

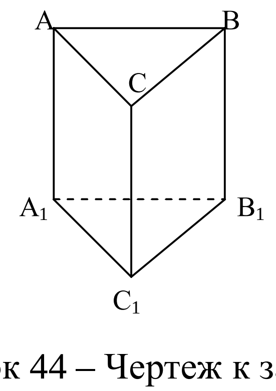


Рисунок 44 – Чертеж к задаче 2

3. $AD = DA_1$, $h = AA_1 = 2AD$, т.к.

$\angle DC_1A_1 = 45°$ и $\angle DA_1C_1 = 90° \Rightarrow \angle A_1DC_1 = 45° \Rightarrow \Delta DA_1C_1$ - *равнобедренный* ,

$S_б = P_o \cdot h$ (рис. 45)

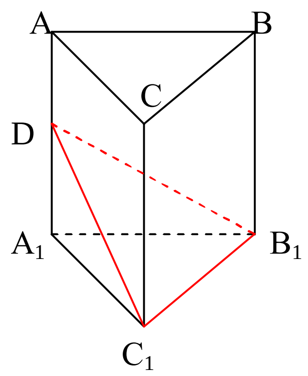


Рисунок 45 – Чертеж к задаче 3

4.ABCD – квадрат, SO – высота, SO = 7 см, AB=BC=CD=AD=8см,

AS=BS=CS=DS=? $\Delta SOA : OA$ - радиус описанной окружности, $R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$; R – радиус описанной окружности, a_4 – сторона вписанного правильного четырехугольника $\Rightarrow$ $AB = ...$ и $OA = ...$ Далее по теореме Пифагора: $AS^2 = ...$(Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, гипотенуза – сторона прямоугольного Δ, лежащая против угла в 90^o).(рис. 46)

Таблица 10 – Основные формулы стереометрии

Фигура	*Площадь полной поверхности*	*Площадь боковой поверхности*
Призма	$S_n = S_б + 2S_o$	$S_б = p \cdot l$, *p – периметр основания,* *l – длина бокового ребра.*
Пирамида	$S_n = S_б + S_o$	$S_б = \dfrac{p \cdot l}{2}$, *l- апофема,*

		p – периметр основания
Усеченная пирамида	$S_n = S_б + S_{o1} + S_{o2}$ S_{o1}- площадь верхнего основания S_{o2}- площадь нижнего основания	$S_б = \dfrac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$ *P_1- периметр верхнего основания* *P_2- периметр нижнего основания*

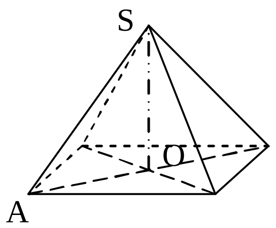


Рисунок 46 – Чертеж к задаче 4

5. ABCD – квадрат, SO – высота,

$S_n = S_б + S_o \Rightarrow S_o = ...\ S_o = S_{квадрата} = (сторона\_квадрата)^2 \Rightarrow$ Находим сторону квадрата, подставив найденное

S_o. $\Delta SOK: KS = l$ - *апофема*, $S_б = \dfrac{p \cdot l}{2} = \dfrac{p \cdot KS}{2}$ Отсюда выражаем KS: учтем что p- периметр(сумма всех сторон многоугольника).По теореме Пифагора находим SO. Для этого потребуется знать OK. Т.к. KS – апофема, то она является и медианой и ABCD – квадрат, то OK – половина любой его стороны.(рис. 47)

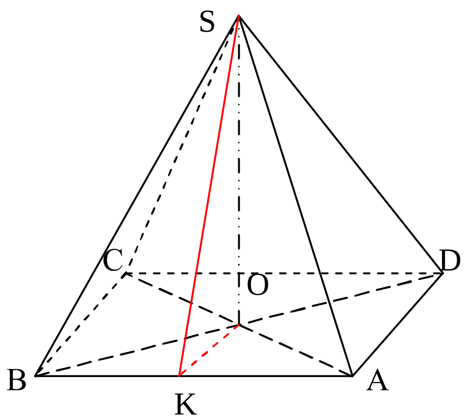


Рисунок 47 – Чертеж к задаче 5

2.3 Тела вращения

Работа № 1

1) Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Найти площадь полной поверхности и объем цилиндра.
2) Высота прямого кругового конуса равна 4см, диаметр основания 6 см. Найдите образующую конуса, его полную поверхность и объем.
3) Радиус земного шара примерно 6370км. Определите длину экватора, поверхность и объем Земли.

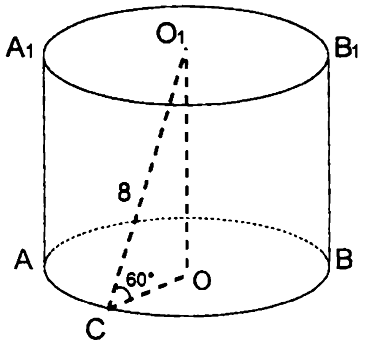
Работа № 2

Решите задачи на готовых чертежах, представленных в таблицах 11, 12,13,14.

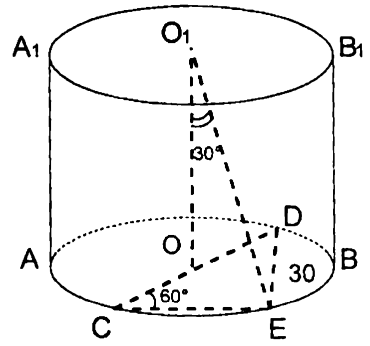
1) OO_1 – ось цилиндра. Найти объем и площадь боковой поверхности цилиндра (табл.11)

Таблица 11 – Задачи по теме «Цилиндр»

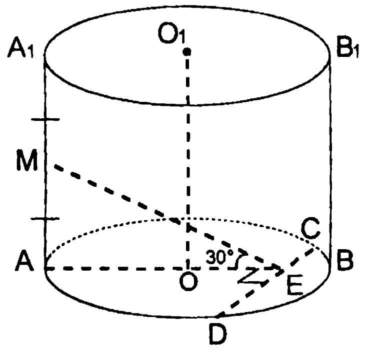
1



2

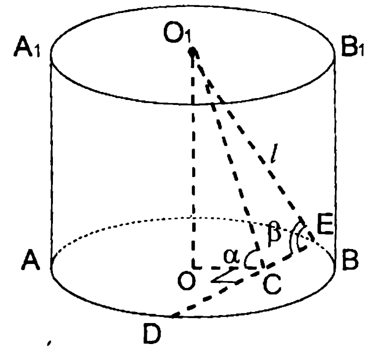


3

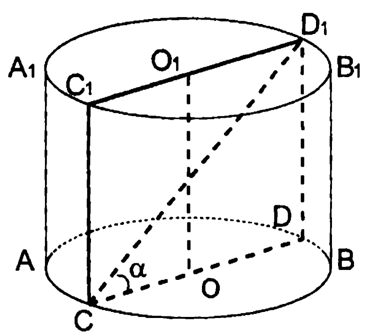


Дано: $OE = 6$, $CD = 16$.

4

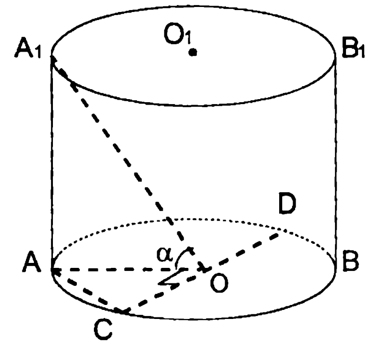


5



Дано: $S_{CC_1D_1D} = Q$.

6

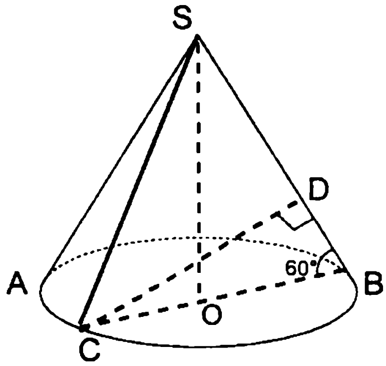


Дано: $AC = 2a$.

2) SO – высота конуса. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса (табл.12)

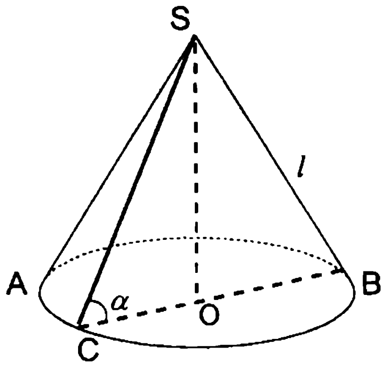
Таблица 12 – Задачи по теме «Конус»

1

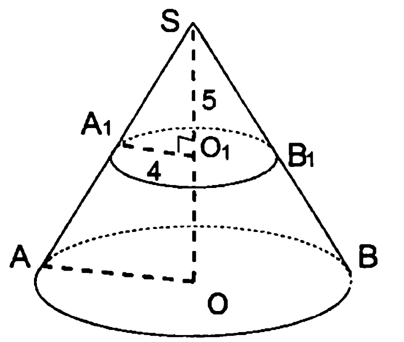


Дано: $CD = 6$.

2

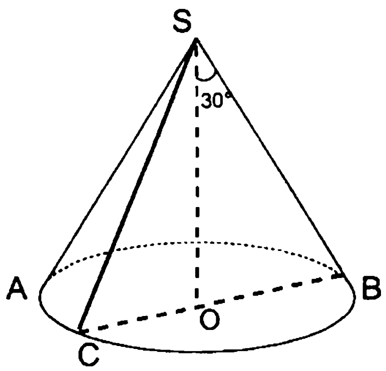


3



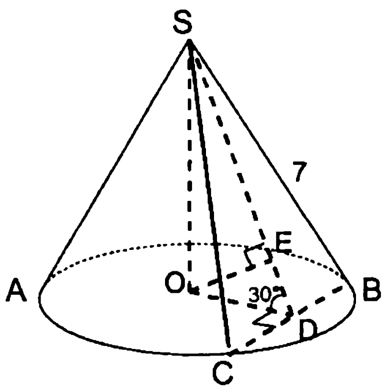
Дано: O_1 – центр круга – сечения конуса плоскостью, $SO = 15$.

4



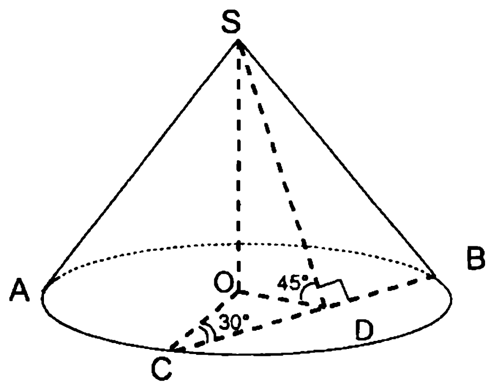
Дано: $S_{SBC} = Q$.

5



Дано: $OE = 3$.

6

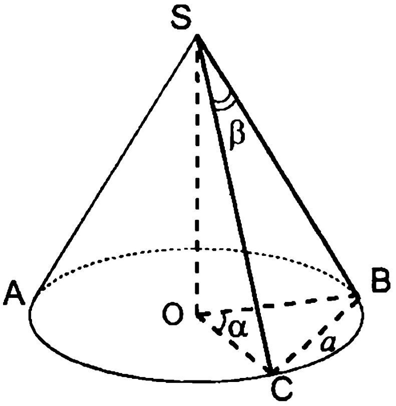
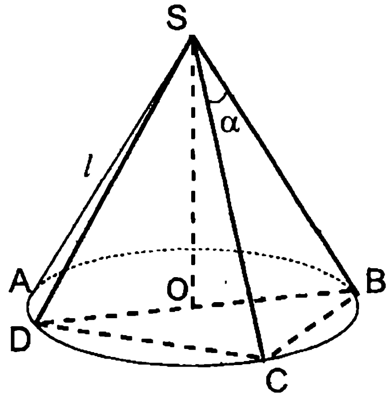
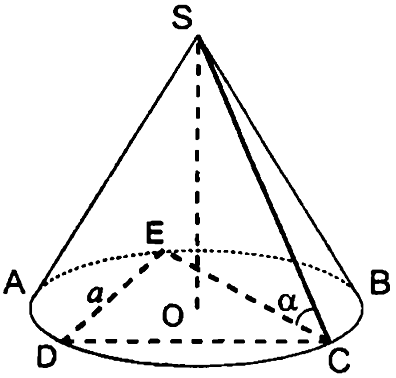
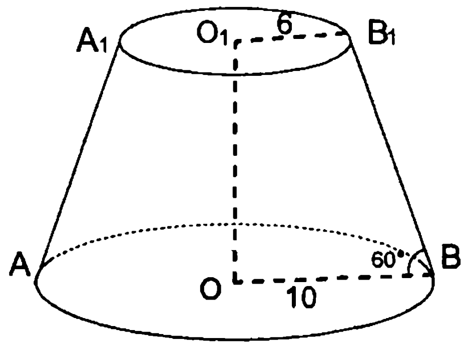
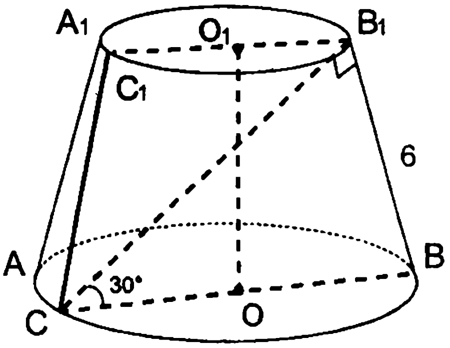
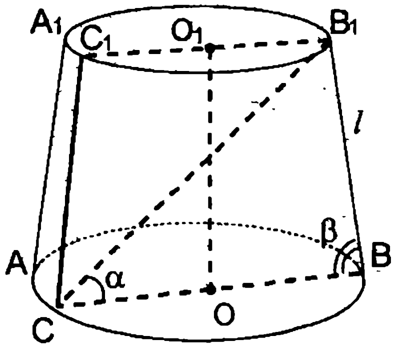


1) Дано: $BC = 12$.

2) Дано: $SB = 3\sqrt{5}$.

3) SO – высота конуса. О, О1 – центры оснований усеченного конуса. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса (табл.13)

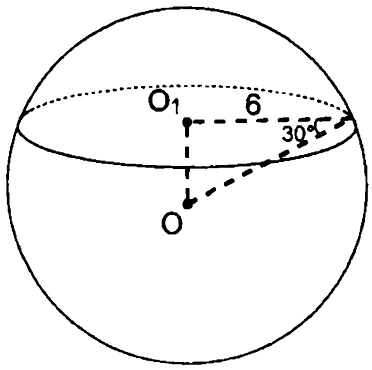
Таблица 13 – Задачи по теме «Конус. Усеченный конус»

1 	**2**  Дано: $\angle DSC = \beta$.
3  Дано: ΔCDE – **правильный.**	**4** 
5 	**6** 

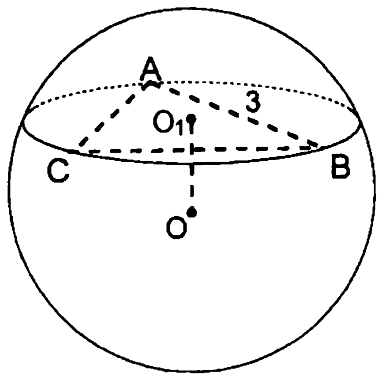
3) О – центр шара. О, О1 – центры кругов – сечений шара плоскостью. Найти объем и площадь поверхности шара (табл.14)

Таблица 14 – Задачи по теме «Шар. Сфера»

1

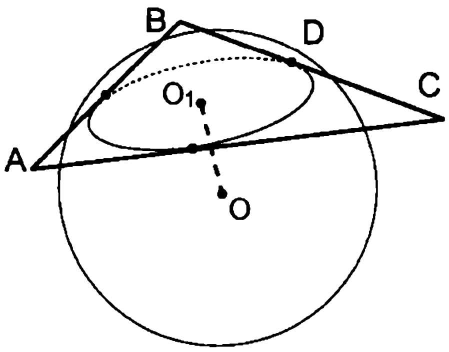


2



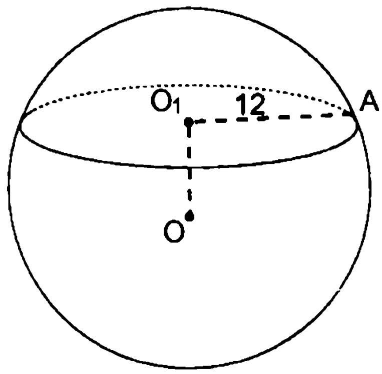
Дано: ΔABC – правильный, $OO_1 = 3$.

3



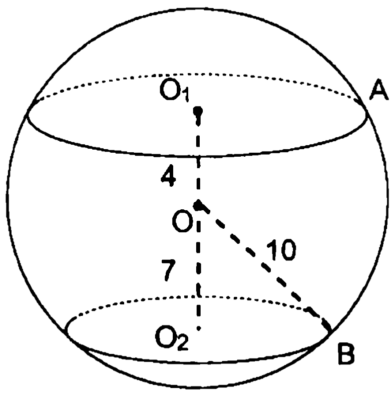
Дано:
$OO_1 = 4$, $AB = AC = 10$, $BC = 12$.

4



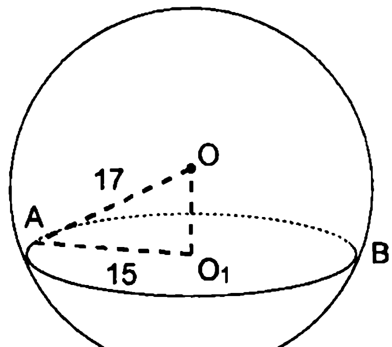
Дано: $OO_1 = 5$. Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.

5



Найти объем и площадь сферической части шарового кольца.

6



Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.

Заключение

В данных методических рекомендациях кратко изложен теоретический материал, вошедший в программу изучения дисциплины «Математика» раздела «Геометрия» для всех специальностей первого курса по новым ФГОС.

Это пособие предназначено в первую очередь для студентов, которые желаю углубить свои знания, повторить и восстановить их перед экзаменом. А так же для студентов, которые по каким-либо причинам не успели усвоить материал по теме на занятиях в аудитории. Во втором разделе были включены задачи для закрепления по все подразделам темы «Геометрия», которые дают возможность студенту основательно подготовиться к практической работе, зачету и экзамену.

Список использованных источников

1 Атанасян Л. С., В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. Геометрия 7-9. Издательство «Просвещение», 2007г., 384с.

2 Атанасян Л. С., В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. Геометрия 10-11. Издательство «Просвещение», 2007г., 285с.

3 Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва; Наука, 1988г.

1. Габриелян О. С., Химия. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений; М.: «Дрофа», 2005г. – 362[6]с.
2. . Геометрия. 10-11 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е издание, исправленное и дополненное – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с. : ил.
3. Геометрия. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Шарыгин И. Ф. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.: ил.
4. Геометрия. 10 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики /Е. В. Потоскуев, Л. И. Звалич. – 6-е издание, стереотип. – М. : Дрофа, 008. – 233 с. :ил.
5. Глинка Н. Л., Общая химия: Учебное пособие для вузов; М.: «Интеграл-Пресс», 2008 г. – 728 с.
6. Кузьменко Н. Е., Ерёмин В. В., Попков В. А., Начала химии. Современный курс для поступающих в ВУЗы. Т.1; М.: «Экзамен», 2002г. – 384 с.
7. Лидин Р. А., Аликберова Л. Ю., Химия. Справочник для старшеклассников и поступающих в ВУЗы; М.: «АСТ-ПРЕСС ШКОЛА», 2006г. – 512 с.
8. Малугин В. А., Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. Глав 3. Векторная алгебра. Москва; Эксмо, 2006г., 224с.
9. Мякишев Г. Я., Физика: учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений; М.: «Просвещение», 2005г. – 366с.
10. Мякишев Г. Я., Физика: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений; М.: «Просвещение», 2004г. – 382с.
11. Перышкин А. В., Физика 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений; М.: «Дрофа», 2004 г. – 256с.

12. Правила дорожного движения Российской Федерации с иллюстрациями; М.; ООО «АТБЕРГ 98», 2007г.
13. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10- 11 классы. Геометрия. – М.: Илекса, 2008. – 80с.
14. Тейлор Д., Грин Н., Стаут У., Биология. Т.3; М.: «МИР», 2006г. – 451с.
15. Уиллет Э., Генетика без тайн; М.: «Эксмо», 2008г. – 224с.
16. Шарапова В.К. Тематические тесты по геометрии 10-11 класс: учеб. Пособие./В.К.Шарапова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2007. – 64с. (Здравствуй школа).